第36卷 第3期 交 通 科 学 与 工 程 Vol.36 No.3
2020年 9月 JOURNAL OF TRANSPORT SCIENCE AND ENGINEERING Sep. 2020

文章编号：1674－599X(2020)03－0037－06

损伤分析的精确增量迭代算法

赵冰，宋文浩，陈健，彭晖，彭旭龙
(长沙理工大学 土木工程学院，湖南 长沙 410004)

摘 要：针对进行损伤非线性分析时，传统增量迭代算法会产生无法消除的漂移误差，提出了一种精确的增量迭代算法：正割刚度-附加载荷法。该算法采用正割刚度矩阵和附加荷载建立其增量平衡方程，再将增量平衡方程与弧长法相结合的一种迭代算法。研究结果表明：正割刚度-附加载荷法可以精确地捕捉到结构的真实平衡路径，有效地校正了漂移误差。

关键词：损伤分析；漂移误差；增量迭代算法；正割刚度；附加荷载
中图分类号：TU31 **文献标志码：**A
DOI:10.16544/j.cnki.cn43-1494/u.2020.03.006

Anaccurate incremental-iterative algorithm for damage analysis

ZHAO Bing, SONG Wen-hao, CHEN Jian, PENG Hui, PENG Xu-long
(School of Civil Engineering, Changsha University of Science & Technology, Changsha 410114, China)

Abstract: To solve the problem that drift error cannot be eliminated by the traditional incremental-iterative algorithm in nonlinear damage analysis, an accurate incremental iterative algorithm namely secant stiffness-additional load method (SSALM) is proposed. In the method, the incremental equilibrium equation is established by using the secant stiffness matrixand additional load in the algorithm. Then, a new incremental-iterative algorithm is establishedcombining the incremental equilibrium equation with the arc-length approach. The results indicate that the SSALM can accurately capture the real equilibrium path of structure and effectively correct the drift error.

Key words: damage analysis; drift error; incremental-iterative algorithm; secant stiffness; additional load

损伤非线性分析已应用于众多领域，如：材料疲劳寿命的预测、构件裂纹的萌生与扩展及岩土强度的分析等。对于损伤力学，其结构应力依赖于变形历史，全量理论已不再适用。必须采用增量理论，跟踪结构的平衡路径。因此，增量平衡方程在非线性分析中，得到了广泛的应用。唐雪松[1−2]等人采用损伤力学-有限元法，研究了加载次序对疲劳寿命的影响作用，并对标准疲劳试验构件进行了疲劳寿命预测。张杰毅[3]等人采用损伤力学-有限元法，预估了球轴承的接触疲劳寿命。李聪成[4]等人采用损伤力学有限元法，分析了蠕变疲劳交互作用下，影响裂纹萌生寿命的因素。张我华[5]等人将损伤力学引入岩石类介质的非线性本构模型，分别建立了脆性动力和弹黏塑性动力的损伤模型，并编制相应的有限元程序，分析岩石的动力学行为。损伤非线性分析已运用到医学领域。Taylor[6]等人采用损伤力学-有限元法，模拟了人体骨骼在人造环境内的疲劳行为，应用于人体脑骨骼样本的疲劳失效次数、弹性模量的退化及骨骼内永久应变的累积状况。考虑这些传统损伤有限元分析中的增量迭代算法，会产生迭代无法消除的漂移误差。作者拟提出一种全新的增量迭代方法：正割刚度-附加荷载法(Secant stiffness– additional load method,简称为 SSALM)，以校正传统增量迭代法的全部漂移误差，寻求其真

收稿日期：2019−11−12
作者简介：赵冰(1978−)，男，长沙理工大学副教授，博士。

实的结构响应，以提高算法的稳定性。

1　传统损伤算法中漂移误差的成因

损伤非线性有限元格式可简单分为两类：

1) 第一类是利用力的平衡条件(内力与外力平衡)或虚功原理得到的全量形式[7]：

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{u}=\sum_{\mathrm{e}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\int_{\Omega^{\mathrm{e}}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\Omega^{\mathrm{e}}=\lambda\boldsymbol{f}\text{ 。}\tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{K}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{u})$为结构在某种状态($\lambda,\boldsymbol{u}$)下的正割刚度矩阵；$\boldsymbol{u}$ 为结构位移矢量；$\boldsymbol{B}$ 为应变矩阵；$\boldsymbol{\sigma}$ 为全量应力张量；Ω^{e} 为单元体积；$\boldsymbol{G}$ 为组装矩阵。

外力由荷载因子 λ 与基准荷载矢量 $\boldsymbol{f}$ 的乘积形式表示。当结构的外力与内力处于非平衡状态时，则体系内存在残余力矢量 $\boldsymbol{r}$ 为：

$$\boldsymbol{r}(\lambda,\boldsymbol{u})=\lambda\boldsymbol{f}-\boldsymbol{K}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{u}\text{ 。}\tag{2}$$

全量应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 可由损伤本构表达式为[8]：

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{C}_{D}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\text{ 。}\tag{3}$$

式中：$\boldsymbol{\varepsilon}$ 为全量应变张量；$\boldsymbol{C}_D$ 为损伤本构张量。

将式(3)代入式(1)，全量平衡方程为：

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{u}=(\sum_{\mathrm{e}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\cdot\int_{\Omega^{\mathrm{e}}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{D}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{B}\mathrm{d}\Omega^{\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{G})\cdot\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{f}\text{ 。}\tag{4}$$

2) 第二类为增量平衡方程，其有限元基本式[9]为：

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u})\cdot\Delta\boldsymbol{u}=\sum_{\mathrm{e}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\int_{\Omega^{\mathrm{e}}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\Omega^{\mathrm{e}}=\Delta\lambda\boldsymbol{f}\text{ 。}\tag{5}$$

式中：$\Delta\boldsymbol{\sigma}$ 为增量应力张量；$\Delta\boldsymbol{u}$ 为增量位移矢量；$\Delta\lambda$ 为增量荷载因子；$\boldsymbol{K}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u})$为切线刚度矩阵。

在实际应用过程中，常采用增量的伤本构[10]：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{C}_{D}(\boldsymbol{u})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}\text{ 。}\tag{6}$$

对式(6)进行线性化处理[11]，可得：

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}=\int_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{u}+\Delta\boldsymbol{u}}\boldsymbol{C}_{D}(\boldsymbol{u})\cdot\mathrm{d}\varepsilon\doteq\boldsymbol{C}_{D}^{0}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\text{ 。}\tag{7}$$

式中：$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ 为增量应变张量；$\boldsymbol{C}_{D}^{0}$ 为初始损伤本构张量。

将式(7)代入式(5)，可得增量平衡方程的有限元法格式：

$$(\sum_{\mathrm{e}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\cdot\int_{\Omega^{\mathrm{e}}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{D}^{0}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\Omega^{\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{G})\cdot\Delta\boldsymbol{u}=\Delta\lambda\boldsymbol{f}\text{ 。}\tag{8}$$

令 $\sum_{\mathrm{e}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\cdot\int_{\Omega^{\mathrm{e}}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{D}^{0}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\Omega^{\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{G}=\boldsymbol{K}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{u})$，则式(8)为：

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{u})\cdot\Delta\boldsymbol{u}=\Delta\lambda\boldsymbol{f}\text{ 。}\tag{9}$$

将式(6)和(9)称为传统增量迭代法，而式(9)是传统增量平衡方程。该方法已应用于许多领域，如：疲劳寿命预测[1−3]和高阶梯度损伤理论[12]等。对比式(5)，(9)可以看出，式(9)中的传统方法是采用$\boldsymbol{K}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{u})$代替了式(5)的$\boldsymbol{K}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u})$。然而，切线刚度矩阵[13]由式(2)导出：

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u})=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\boldsymbol{u}}=-(\boldsymbol{K}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{u})+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{K}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{u})\text{ 。}\tag{10}$$

同时，由式(10)可知，传统增量迭代法简单地利用 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{u})$代替 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u})$，会忽略掉 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{K}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{u}$ 。

单纯地采用增量法，必然引起解的漂移[13]。如果没有模型误差，这种解的漂移通常是通过在增量步内设置迭代来校正的[13]。因为传统增量迭代法忽略掉了 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{K}_{\mathrm{S}}(u)}{\mathrm{d}u}\cdot u$ 。所以，导致增量平衡方程所表征的平衡路径失真，而引起漂移误差，并且不能通过迭代技术消除。采用 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u})$表达的增量迭代算法，在峰值点附近，常常存在刚度矩阵病态化、奇异化及收敛性差[14]等问题，其稳定性在很大程度上取决于 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u})$的条件数。

2　SSALM 法

对式(2)进行全微分展开，可得：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\boldsymbol{u}}\mathrm{d}\boldsymbol{u}+\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\lambda}\mathrm{d}\lambda=0\text{ 。}\tag{11}$$

将式(10)代入式(11)，可得：

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{u})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{u}+\mathrm{d}\boldsymbol{K}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}\mathrm{d}\lambda\text{ 。}\tag{12}$$

对于损伤力学，正割刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{S}}(u)$的表达式为：

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{u})=\sum_{\mathrm{e}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}^{D})^{\mathrm{e}}\boldsymbol{G}\text{ 。}\tag{13}$$

式中：$(\boldsymbol{K}^{D})^{\mathrm{e}}=\int_{\Omega^{\mathrm{e}}}(1-D)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\Omega^{\mathrm{e}}$ 为含损伤的单元刚度矩阵；D 为损伤变量；$\boldsymbol{C}$ 为弹性本构张量。

将式(13)代入式(12)，可得：

$$\sum_{\mathrm{e}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\int_{\Omega^{\mathrm{e}}}(1-D)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\Omega^{\mathrm{e}})\boldsymbol{G}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}\mathrm{d}\lambda+\sum_{\mathrm{e}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\int_{\Omega^{\mathrm{e}}}\mathrm{d}D\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\Omega^{\mathrm{e}})\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{u}\text{ 。}\tag{14}$$

式(14)可简写为：

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{u})\cdot\Delta\boldsymbol{u}=\Delta\lambda\boldsymbol{f}+\boldsymbol{f}^{D}\text{ 。}\tag{15}$$

其中，$\boldsymbol{f}^D=\sum_{\mathrm{e}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\int_{\Omega^{\mathrm{e}}}\Delta D\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\Omega^{\mathrm{e}})\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{u}$ 为附加荷载矢量；$\boldsymbol{K}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{u})=\sum_{\mathrm{e}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\int_{\Omega^{\mathrm{e}}}(1-D)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\Omega^{\mathrm{e}})\boldsymbol{G}$ 为损伤中的正割刚度矩阵。

式(15)为 SSALM 法的增量平衡方程。与传统的增量迭代法相比，一个额外的附加荷载矢量 $\boldsymbol{f}^D$ 被引入到 SSALM 法的增量平衡方程之中。

式(15)也可以由式(1)和式(13)推导出，损伤力学全量形式的平衡方程表达式为：

$$\sum_{\mathrm{e}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\int_{\Omega^{\mathrm{e}}}(1-D)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\Omega^{\mathrm{e}})\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{f}\text{。}\tag{16}$$

考虑 2 个相邻的平衡状态 $(\boldsymbol{u}_{i-1},\lambda_{i-1})$ 和 $(\boldsymbol{u}_i,\lambda_i)$，得到增量平衡方程为：

$$\sum_{\mathrm{e}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\int_{\Omega^{\mathrm{e}}}(1-D_i)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\Omega^{\mathrm{e}})\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{u}_i=\lambda_i\boldsymbol{f}\text{。}\tag{17}$$

$$\sum_{\mathrm{e}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\int_{\Omega^{\mathrm{e}}}(1-D_{i-1})\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\Omega^{\mathrm{e}})\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{u}_{i-1}=\lambda_{i-1}\boldsymbol{f}\text{。}\tag{18}$$

式中：i 为当前平衡状态；i–1 为上一个平衡状态。

其中，$\lambda_i>\lambda_{i-1}$。利用式(17)减去式(18)，则可得增量平衡方程为：

$$\sum_{\mathrm{e}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\int_{\Omega^{\mathrm{e}}}(1-D_i)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\Omega^{\mathrm{e}})\boldsymbol{G}\cdot\Delta\boldsymbol{u}_i=$$
$$\Delta\lambda_i\boldsymbol{f}+\sum_{\mathrm{e}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\int_{\Omega^{\mathrm{e}}}(D_i-D_{i-1})\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\Omega^{\mathrm{e}})\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{u}_{i-1}\text{。}\tag{19}$$

其中，$\Delta\lambda_i=\lambda_i-\lambda_{i-1}$，$\Delta\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{u}_i-\boldsymbol{u}_{i-1}$，且

$$\sum_{\mathrm{e}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\int_{\Omega^{\mathrm{e}}}(D_i-D_{i-1})\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\Omega^{\mathrm{e}})\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{u}_{i-1}=\boldsymbol{f}^D\text{。}\tag{20}$$

式(19)可简化为：

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{u}_i)\cdot\Delta\boldsymbol{u}_i=\Delta\lambda_i\boldsymbol{f}+\boldsymbol{f}^D\text{。}\tag{21}$$

式(15)，(21)具有相同的形式，均由 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{u})$和 $\boldsymbol{f}^D$ 表达。因此，正割刚度-附加荷载法的增量平衡方程，已从 2 个不同的角度完成推导。

为了提高 SSALM 法的求解精度，可以在增量步内加入平衡校正的迭代步[13]。通过将式(15)或式(21)与迭代技术相结合，得到新的增量迭代方程：

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{u}_i)\Delta\boldsymbol{u}_i^j=\Delta\lambda_i^j\boldsymbol{f}+\boldsymbol{f}^D-\boldsymbol{r}_i^{j-1}(\lambda_i^{j-1},\boldsymbol{u}_i^{j-1})\text{。}\tag{22}$$

式中：j 为迭代次数；i 为增量步。

由于引入了荷载因子 λ，式(22)多出的一个未知量需要补充一个约束方程。该弧长形式的约束方程[15]为：

$$(\Delta\boldsymbol{u}_i^j)^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{u}_i^j+(\Delta\lambda_i^j)^2\cdot\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{f}=l^2\text{。}\tag{23}$$

式中：l 为规定弧长。

Crisfield[16]等人提出过其他类型的约束方程。本研究采用最经典的弧长迭代法。

SSALM 法由 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{u})$来表达的，避免了在峰值点附近 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u})$病态化的现象。

将 SSALM 法编入 FORTRAN 有限元程序中，每个迭代步的收敛条件，采用位移判断准则。

3　试验算例

依托损伤杆的单轴拉伸和损伤梁的纯弯曲 2 个试验算例，验证 SSALM 法的精确性。

3.1　损伤杆模型的单轴拉伸

采用 8 节点平面应变单元，建立损伤杆单轴拉伸的有限元模型，共 12 609 个节点和 4 096 个单元。杆左端完全固定，杆右端施加平行于杆轴的均布荷载 q，如图 1 所示。模型材料参数为：弹性模量 E_0=21.0 GPa，泊松比 υ=0。采用与应变相关的损伤演化律：

$$D_1=\begin{cases}0, & \varepsilon\leqslant 0;\\ \varepsilon/\kappa, & \varepsilon\geqslant 0\text{。}\end{cases}\tag{24}$$

式中：ε 为单轴拉伸应变；$\kappa=3.50\times10^{-6}$ 为损伤参数。

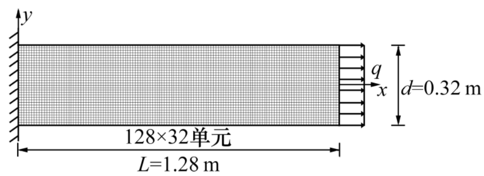

图 1　单轴拉伸损伤杆的有限元网格和边界条件

Fig. 1　FEM mesh and boundary conditions of the damage bar

损伤杆的单轴拉伸有解析解。分别使用传统方法、SSALM 法和解析法，求出损伤杆的荷载-位移曲线，如图 2 所示。从图 2 中可以看出，传统方法出现了明显的漂移误差，即使改变增量步的步长，漂移误差并未改善。而采用 SSALM 法，所模拟的结果，与解析解非常吻合。表明：传统增量迭代法发生了无法迭代消除的漂移误差，而 SSALM 法可以跟踪到结构的真实响应。

3.2　损伤梁模型的纯弯曲

悬臂梁的纯弯曲有限元模型如图 3 所示，采用

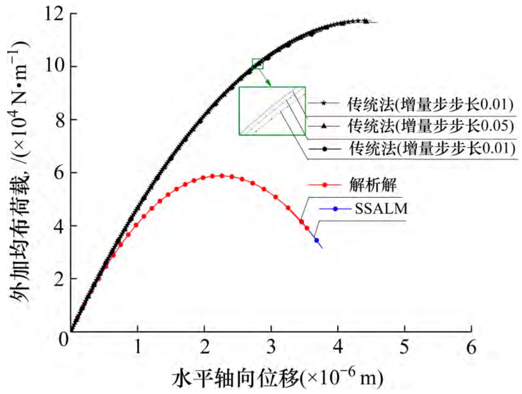

图 2 单轴拉伸损伤杆模型的载荷-位移曲线

Fig. 2 Load-displacement curves of the uniaxial tension of damage bar

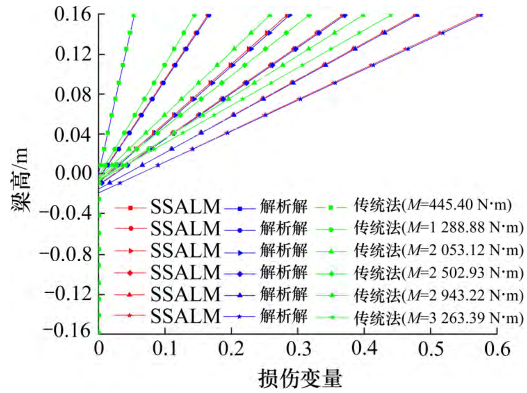

图 4 梁中间横截面损伤分布

Fig. 4 The distribution of damage in the cross section of the beam

与损伤杆单轴拉伸的有限元模型相同的网格。梁的左端完全固定，梁的右端施加了大小为 M 的弯矩。模型材料参数为：弹性模量 E_0=21.0 GPa，泊松比 υ=0。采用了与应力相关的损伤演化律。损伤变量定义(损伤演化方程式)为：

$$D_2=\begin{cases} 0, & \tilde{\sigma}\leqslant 0; \\ \tilde{\sigma}/\kappa, & \tilde{\sigma}\geqslant 0。\end{cases} \tag{25}$$

式中：$\tilde{\sigma}$ 为损伤力学中所定义的有效应力，κ=5.0×10^5 Pa 为损伤参数。

该纯弯梁的解析解在文献[17]中已经给出。

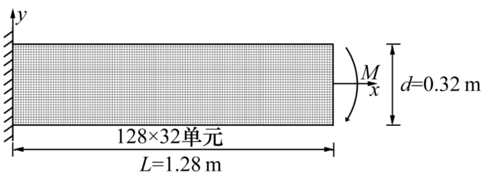

图 3 纯弯曲损伤梁的有限元网格和边界条件

Fig. 3 FEM mesh and boundary conditions of the damage cantilever beam

考虑到圣维南原理(远离右端的横截面，受边界效应的影响不大)和纯弯曲的变形特点，远离右端的任意截面，具有相同的损伤分布。本算例取中间横截面，分析其损伤分布和变形。

根据 SSALM 法和解析法，得到梁的中间横截面的损伤分布，如图 4 所示。从图 4 中可以看出，受压区无损伤发生，受拉区的损伤发展与梁的深度 d 成线性关系。梁的中性层随着外加弯矩 M 的增大，逐渐下移。最大损伤 D_{max} 出现在梁顶。这些规律与式(25)一致，且与实际结果相吻合。采用 SSALM 法得到的结果与解析解非常吻合。

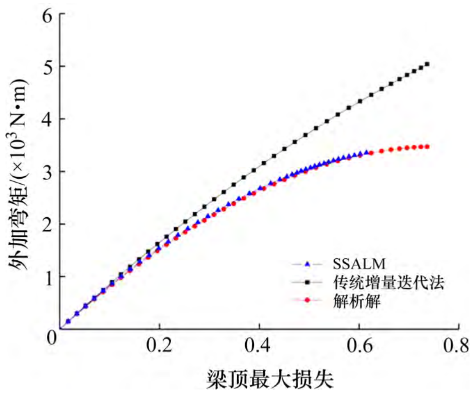

图 5 弯矩 M 与最大损伤 D_{max} 的曲线关系

Fig. 5 The bending moment M-maximum damage D_{max} curves

梁顶最大损伤 D_{max} 与外部施加弯矩 M 之间的关系，如图 5 所示。从图 5 中可以看出，传统增量迭代法追踪的平衡路径与解析解偏离的非常严重。而 SSALM 法精确地捕捉到了结构的真实平衡路径，不会出现迭代无法消除的漂移误差。

4 传统法和 SSALM 法对比分析

通过对比分析传统增量迭代法和 SSALM 法，分析引起传统增量迭代法误差的原因和 SSALM 法如何修正该误差。

式(6)的增量应力-应变关系，由式(3)得到表达式(26)或(27)为：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{C}_D\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{C}_D。 \tag{26}$$

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{C}_D\cdot\Delta\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\Delta\boldsymbol{C}_D。 \tag{27}$$

比较式(7)与式(27)可知，$\varepsilon\cdot\Delta C_D$ 项在式(7)中被

忽略。传统的损伤有限元法，由于忽略掉了 $\varepsilon\cdot\Delta\boldsymbol{C}_D$ 项，其精度必然会下降。而在 SSALM 中，被忽略掉的 $\varepsilon\cdot\Delta\boldsymbol{C}_D$ 项，被转化成附加荷载 $\boldsymbol{f}^D$，引入到增量平衡方程之中，克服了传统方法所产生的漂移误差。

传统增量迭代法与 SSALM 的相互关系，如图 6 所示。虚线和空心点表示传统增量迭代法的结果和路径；点划线和实心点表示 SSALM 的结果和路径。

传统增量法在 $\Delta\lambda_i\boldsymbol{f}$ 的增量荷载下，位移增量为 $\Delta\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{Sim}}$ (对应图 6 中的空心方点)：

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{u}_i)\cdot\Delta\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{Sim}}=\Delta\lambda_i\boldsymbol{f}\ 。\tag{28}$$

在增量步内利用迭代技术，可消除部分漂移误差，将图 6 中空心方点校正到空心圆点。

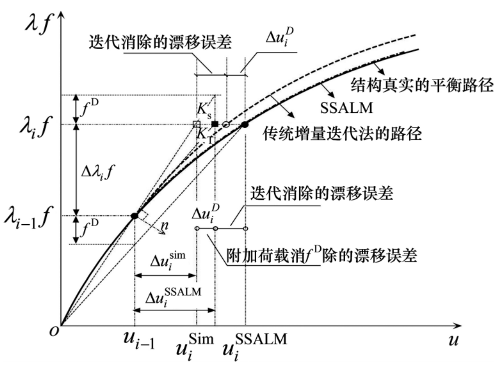

图 6　传统法和 SSALM 法的误差对比分析

Fig. 6　The error contrastive analysis in two different incremental-iterative methods

SSALM 法在 $\Delta\lambda_i\boldsymbol{f}$ 的增量荷载下，位移增量 $\Delta\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{SSALM}}$ 除了含有 $\Delta\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{Sim}}$ 以外，还包含附加荷载 $\boldsymbol{f}^D$ 所引起的增量位移 $\Delta\boldsymbol{u}_i^D$：

$$\Delta\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{SSALM}}=\Delta\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{Sim}}+\Delta\boldsymbol{u}_i^D\ 。\tag{29}$$

其中，$\Delta\boldsymbol{u}_i^D$ 满足：

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{u}_i)\cdot\Delta\boldsymbol{u}_i^D=\boldsymbol{f}^D\ 。\tag{30}$$

由式(29)可以知，传统增量迭代法中，由于忽略 $\varepsilon\cdot\Delta\boldsymbol{C}_D$，产生了漂移误差(模型误差)，该漂移误差可以通过引入 $\boldsymbol{f}^D$ 有效消除，使得损伤有限元分析更贴近真实解。表明：SSALM 法将 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{T}}$ 对应的增量位移，分解为 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{S}}$ 对应的增量位移和 $\boldsymbol{f}^D$ 对应的增量位移 2 个部分。

5　结论

1) 在进行损伤非线性分析时，传统的增量迭代算法，会产生迭代无法消除的漂移误差。

2) SSALM 法可以精确地捕捉到结构的真实平衡路径，不会出现迭代无法消除的漂移误差。

3) SSALM 法将 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{T}}$ 对应的增量位移分解为 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{S}}$ 对应的增量位移和 $\boldsymbol{f}^D$ 对应的增量位移 2 个部分。

参考文献(References)：

[1] 唐雪松,郑健龙,蒋持平.传统疲劳经验公式的损伤力学解释[J].长沙交通学院学报,2000,16(2):2−5.(TANG Xue-song,ZHENG Jian-long,JIANG Chi-ping.Damage mechanical interpretation on classical fatigue empirical formula[J]. Journal of Changsha Communications University, 2000,16(2):2−5.(in Chinese))

[2] 唐雪松,杨继运,蒋持平,等.轴对称构件疲劳寿命预测的损伤力学-附加载荷-有限元法[J].航空学报,2002,23(2): 97−101.(TANG Xue-song,YANG Ji-yun,JIANG Chi-ping, et al. Damage mechanics-additional load-finite element method for fatigue life prediction of ax symmetrical structural members[J]. Acta Aeronautica ET Astronauica Snica,2002,23(2):97−101.(in Chinese))

[3] 张杰毅,陈果,谢阶栋,等.球轴承接触疲劳寿命预估的损伤力学-有限元法[J].航空动力学报,2019, 34(10):2246−2255. (ZHANG Jie-yi, CHEN Guo, XIE Jie-dong, et al. Damage mechanics-finite element method for contact fatigue life prediction of ball bearings[J].Journal of Aerospace Power, 2019, 34(10): 2246−2255.(in Chinese))

[4] 李聪成,荆洪阳,徐连勇,等.蠕变疲劳交互作用下裂纹萌生的有限元模拟[J]. 焊接学报, 2016, 37(8): 5−8. (LI Cong-cheng, JING Hong-yang, XU Lian-yong, et al. Numerical simulation of crack initiation under creep-fatigue interaction in P92 steel[J]. Transactions of the China Welding Institution,2016,37(8):5−8.(in Chinese))

[5] 张我华,邱战洪,李鸿波.岩石类介质的非线性动力损伤有限元模型[J].科技通报,2005,21(5):615−623.(ZHANG Wo-hua,QIU Zhan-hong,LI Hong-bo.Non-linear dynamic damage finite elements model for rock like materials[J]. Bulletin of Science and Technology,2005,21(5):615−623. (in Chinese))

[6] Taylor M,Verdonschot N, Huiskes R,et al.A combined finite element method and continuum damage mechanics approach to simulate the in vitro fatigue behavior of human cortical bone[J]. Journal of Materials Science: Materials in Medicine,1999,10(12):841−846.

[7] 高大峰,路军,董旭,等.基于动水及桩-土-结构相互作用

的斜拉桥地震响应分析[J].公路工程,2016, 41(4): 19−23.(GAO Da-feng, LU Jun, DONG Xu, et al. Seismic response analysis of hydrodynamic and pile-soil-structure interaction for cable-stayed bridge[J]. Highway Engineering, 2016, 41(4):19−23.(in Chinese))

[8] Tang X S, Zhang J R, Li C X, et al. Damage analysis and numerical simulation for failure process of a reinforced concrete arch structure[J]. Computers & Structures, 2005, 83(31):2609−2631.

[9] Liu H,Zhang W,Yuan H,et al.Modified double-control form-finding analysis for suspendomes considering the construction process and the friction of cable-strut joints[J]. Engineering Structures,2016,120:75−81.

[10] Dhar S,Sethuraman R,Dixit P M.A continuum damage mechanics model for void growth and micro crack initiation[J].Engineering Fracture Mechanics,1996,53(6): 917−928.

[11] Caseiro J F,Valente R A F,Reali A,et al.Assumed natural strain NURBS-based solid-shell element for the analysis of large deformation elasto-plastic thin-shell structures[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,2015,284:861−880.

[12] 赵冰,杨荣锋,刘智,等.初始损伤对混凝土强度尺寸效应的影响[J].交通科学与工程,2016,32(1):60−66.(ZHAO Bing, YANG Rong-feng, LIU Zhi, et al. Influence of initial damageon the size effect of concrete strength[J]. Journal of Transport Scienceand Engineering,2016,32(1): 60−66.(in Chinese))

[13] Zienkiewicz O C.The Finite Element Method[M]. 3rd ed. London:McGraw-Hill,1977.

[14] Wohlever J C, Healey T J. A group theoretic approach to the global bifurcation analysis of an axially compressed cylindrical shell[J]. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 1995, 122(3−4):315−349.

[15] Crisfield M A. A faster modified newton-raphson interation[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,1979,20(3):267−278.

[16] Crisfield M A.Accelerated solution techniques and concrete cracking[J].Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering,1982,33(1−3):585−607.

[17] Krajcinovic D.Distributed damage theory of beams in pure bending[J].Journal of Applied Mechanics,1979,46(3): 592.