文章编号:1674-599X(2022)03-0057-07

弹性网络正则化移动荷载识别试验研究

余钱华,廖师贤

(长沙理工大学 土木工程学院,湖南 长沙 410114)

摘 要:针对移动荷载稀疏正则化识别方法存在的不足,提出了弹性网络正则化识别法,构建了弹性网络正则化识 别理论和求解方法,分析了单移动荷载工况下3种参数对识别结果的影响。利用MATLAB软件建立了数值模型并 进行验证。研究结果表明:该方法在车辆移动速度、测量噪声水平、测点位置组合的相应工况中,识别结果的相对 误差分别为6.5%、10%和6.5%,稀疏性较好,能反映移动荷载的特征。试验识别结果与真实荷载吻合度高,且该方 法在不同工况中适应性较强,可供工程应用参考。

关键词:移动荷载识别;弹性网络正则化;稀疏表示

中图分类号:0327,TU311 文献标志码:A

Experimental study on moving force identification based on elastic network regularization

YU Qianhua, LIAO Shixian

(School of Civil Engineering, Changsha University of Science & Technology, Changsha 410114, China)

Abstract: In view of the shortcoming of moving load regularization identification method, the elastic network regularization identification method was proposed. The theory and solution strategy of the elastic network regularization identification were established. The influence of three parameters on the identification result was analysed under single moving force. The numerical model was then established using the MATLAB software to verify the effectiveness of the proposed method. The results show that, when the proposed method is used in the case of vehicle moving speed, measurement noise level and combination measurement point location, the relative errors of identification results are 6.5% , 10% and 6.5%, respectively. The sparsity is satisfactory. The result can reflect the moving force characteristic. The identification result is in good agreement with the real force. The proposed method has strong adaptability in different working conditions, that can be used as reference for engineering application.

Key words: moving force identification; elastic network regularization; sparse representation

超限超载运输造成运输是影响道路通行和桥 梁垮塌事故频发的重要原因之一。为管控超限超 载车辆,最早采用静态称重的方法(车辆静止时直 接称量轴重)。随着科技的发展,动态称重方法^[1-2] 也有了长足的发展。当前,动态称重主要有两种方 法:① 基于影响线的 Moses 算法^[3],通过动态过程获 取静态轴重;②基于移动荷载识别理论^[4],建立桥 梁的动力学方程,通过模态叠加法和系统辨识法在 时域或频域上进行求解,获得随时间变化的轴重。 该方法可反映车辆在桥上运行的真实过程,与 Moses算法相比,更符合工程实际。

在移动荷载识别求解方法中,LAW 等人^[5]提出

收稿日期:2021-04-21

作者简介:余钱华(1969—),男,长沙理工大学教授,博士。

了时域法。CHAN等人^[6]提出了解析法II。这些方 法均通过杜哈梅尔积分建立移动荷载与结构响应 之间的关系,直接识别移动荷载。而直接法的识 别方程存在病态性(即输入的微小误差可能导致 识别结果的极大误差)。为解决病态问题,引入了 正则化方法。FITZGERALD等人^[7]将Tikhonov正则 化与桥梁动态称重系统相结合,提出一种基于实 测数据的 Tikhonov 正则化识别法,较传统的结合 L 曲线的 Tikhonov 正则化识别法更简便。PAN 等 人^[8]结合移动时间窗口,改进Tikhonov 正则化识别 法,改善了病态性。虽然Tikhonov正则化改善了直 接法的病态性,但其病态性在特定条件下仍会凸 显,且该方法无法对识别结果进行稀疏表示,而稀 疏正则化具有既可改善病态性,又可对识别结果进 行稀疏表示的优点。ZHONG 等人^[9]基于解析模型 和冗余字典提出一种稀疏正则化识别法,利用小波 函数解决了三角函数无法呈现时变分量的难点。 LIU 等人^[10]基于压缩感知和冗余字典提出一种稀疏 正则化识别法,解决了响应数据存储与传输的能耗 问题。QIAO等人^[11-16]对稀疏正则化模型进行了总结和进一步的研究。

移动荷载正则化识别研究的成果较为丰富,但 现有的正则化识别方法仍存在不足。Tikhonov正 则化识别法存在病态性,L₁范数正则化方法的识 别结果过于稀疏。因此,作者拟提出弹性网络正 则化识别法,构建了其理论体系和求解方法。研 究车辆移动速度、噪声水平、测点位置3种参数对 该方法识别精度的影响。采用MATLAB软件建立 相应的数值模型,对该方法的有效性和适用性进 行验证。

1 移动荷载识别理论

1.1 移动荷载最小二乘识别

以单移动荷载激励下的欧拉梁为例,模型如 图1所示。假定移动荷载与桥梁发生相互作用前, 桥梁处于静止状态。此时,移动荷载和结构响应之 间的关系式为^[17]:

$$\begin{bmatrix} b_{1}/\|b_{1}\|_{2} \\ b_{2}/\|b_{2}\|_{2} \\ \vdots \\ b_{n}/\|b_{n}\|_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}/\|b_{1}\|_{2} & H_{12}/\|b_{1}\|_{2} & \cdots & H_{1n}/\|b_{1}\|_{2} \\ H_{21}/\|b_{2}\|_{2} & H_{22}/\|b_{2}\|_{2} & \cdots & H_{2n}/\|b_{2}\|_{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{n,1}/\|b_{n}\|_{2} H_{n,2}/\|b_{n}\|_{2} & \cdots & H_{n,n}/\|b_{n}\|_{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{1} \\ \alpha_{2} \\ \vdots \\ \alpha_{n} \end{bmatrix}$$
(1)

式中: $b_i = [b_i(\Delta t), b_i(2\Delta t), \dots, b_i(n\Delta t)]^T$ 为第i个测点 测得的结构响应; Δt 为采样时间间隔; $i=n_i; j=n_j$; 将 移动荷载离散化为 $f_i = [f_i(\Delta t), f_i(2\Delta t), \dots, f_i(n\Delta t)]^T$, 且 $f_i \approx D\alpha_i, D = [d_1, d_2, \dots, d_m]$ 为冗余字典; α_i 为第i个 移动荷载的信息,包含字典D中原子系数的向量; H_{ij} 为第j个移动力对应第i个测点之间的系统矩阵, H_{ij} 中第k列元素以字典D采用的第k个原子作为输 入计算的结构响应。



identification

式(1)可简记为 $b=H\alpha$,用最小二乘法求解,得到解为:

$$\boldsymbol{\alpha}_{\text{identified}} = \arg_{\alpha} \min\left\{ \left\| \boldsymbol{H} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \right\|_{2}^{2} \right\}$$
(2)

式(2)中,目标函数未施加任何约束,其识别结 果对噪声敏感。因此,该方法具有与直接法识别方 程相同的病态性。

1.2 移动荷载正则化识别

Tikhonov正则化识别法的原理是采用最小二乘 识别法并施加2-范数约束,其表达式为:

$$\boldsymbol{\alpha}_{\text{identified}} = \arg_{\alpha} \min \left\{ \left\| \boldsymbol{H} \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{b} \right\|_{2}^{2} + \lambda \left\| \boldsymbol{\alpha} \right\|_{2}^{2} \right\}$$
(3)

式中: λ 为正则化参数。

对原方程施加2-范数约束,增加了识别方程的 适定性,但仍不能完全消除方程的病态性,且识别 结果无法突出移动荷载的特征。因此,将惩罚项替 换为1-范数,即得到L₁范数的正则化表达式为: $\boldsymbol{\alpha}_{\text{identified}} = \arg_{\alpha} \min \left\{ \left\| \boldsymbol{H} \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{b} \right\|_{2}^{2} + \lambda \left\| \boldsymbol{\alpha} \right\|_{1} \right\}$ (4)

式(4)施加1-范数约束后,解决了病态问题,识 别结果的稀疏性较好。然而,部分移动荷载的特征 被误认为是噪声,被算法一并剔除,即识别结果过 于稀疏。因此,提出弹性网络正则化识别法,其表 达式为:

$$\boldsymbol{\alpha}_{\text{identified}} = \arg_{\alpha} \min \left\{ \left\| \boldsymbol{H} \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{b} \right\|_{2}^{2} + \lambda \left[(1 - \boldsymbol{\omega}^{2}) \left\| \boldsymbol{\alpha} \right\|_{1} + \boldsymbol{\omega}^{2} \left\| \boldsymbol{\alpha} \right\|_{2}^{2} \right] \right\}$$
(5)

式中: $0 \le \omega \le 1$ 为平衡 1-范数和 2-范数惩罚项的加权 系数, $\omega \in [0, 1]$ 。

式(5)具有L₁范数正则化和Tikhonov正则化的 特点,既解决了病态问题,又能体现移动荷载的特征,且不至于使识别结果过于稀疏。

1.3 弹性网络正则化识别求解

为方便弹性网络正则化识别法的求解,可将公式(5)转化为*L*₁范数正则化的形式,其表达式为:

$$\boldsymbol{\alpha}_{\text{identified}} = \arg_{\alpha} \min \left\{ \left\| \begin{bmatrix} \boldsymbol{H} \\ \sqrt{\lambda} \ \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \right\|_{2}^{2} + \lambda \left[(1 - \boldsymbol{\omega}^{2}) \| \boldsymbol{\alpha} \|_{1} \right] \right\}$$

$$= \arg_{\alpha} \min \left\{ \left\| \boldsymbol{H}_{e} \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{b}_{e} \right\|_{2}^{2} + \lambda_{e} \| \boldsymbol{\alpha} \|_{1} \right\}$$
(6)

式中: H_e 为包含约束信息的扩展系统矩阵; b_e 为扩展的结构响应矢量; λ_e 为对应的正则化参数。

最优正则化参数的选取可分为两步。

1) 估算结构响应的拟合误差,基于贝叶斯信息 准则^[18-20]选取最优正则化参数的计算公式为:

BIC(
$$\lambda$$
) = $n \ln\left(\frac{1}{n} \| H\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{b} \|_{2}^{2}\right) + k \ln(n)$ (7)

式中:n为矢量b的长度;k为标识向量中非零元素的个数。

最优正则化参数λ_{opt}为BIC(λ)取最小值时对应的λ。估计结构响应拟合误差的表达式为:

$$E = \| H\alpha_{L_1} - b \|$$
(8)

式中: a_{L_1} 为采用 L_1 范数正则化计算得出的识别向量。

 选取合适的λ值,使计算的拟合误差与E的 差值尽可能小。其表达式为:

$$\lambda_{\text{opt}} = \arg\min_{\lambda} \left\{ \left\| H\alpha(\lambda) - b \right\|_{2}^{2} - E \right\}$$
(9)

式中:α(λ)为计算得出的识别向量。

确定λ值后,采用快速迭代收缩阈值算法,求解 识别方程式(6)。

2 弹性网络正则化识别法参数研究

2.1 数值案例概述

采用 MATLAB 软件进行建模。模拟的简支梁 长 L=40 m, 抗弯刚度 $S_{\rm B}$ =1.274 916×10¹¹ N·m², 线密 度 ρ =12 000 kg/m, 共划分为20个单元, 如图2所示。 其前三阶固有频率分别为3.20、12.80和28.80 Hz。 每一阶阻尼比均设置为2%。在简支梁横向的1/4、 1/2和3/4位置布置传感器测点, 测量桥梁的弯矩响 应。采用振型叠加法, 考虑桥梁前8阶的模态信息, 设置采样频率为1000 Hz。试算后确定最优加权系 数 ω =5×10⁻³。随机噪声的模拟表达式为:

$$b_{\mathrm{Y}} = b_{\mathrm{N}} + l \times \frac{1}{m} \|b_i\|_{\mathrm{I}} R \tag{10}$$

式中:*b*_r和*b*_n分别为考虑和不考虑测量噪声的结构 响应;*l*为噪声水平;*R*为一个服从标准正态分布的 向量。



图2 数值案例有限元模型



2.2 车辆移动速度的影响

测点位置固定,噪声水平为5%,6种不同车辆 速度的工况如图2所示,相应的识别结果见表1,识 别曲线以工况1为例,如图3所示。

由表1可知,在6个不同工况下,本方法识别结 果的相对误差均在6.5%以内。从图3可以看出,识 别荷载曲线与真实荷载曲线吻合度较高,仅曲线两 端误差相对较大。表明:该方法的识别精度较高, 受车辆速度影响较小。由表1还可知,识别向量中 非零元素的个数始终小于总元素的个数,表明:本 方法具有较好地获取识别结果,并可被稀疏表示的 能力。识别向量中非零元素的个数随着车辆速度 的提高而减少,其主要原因是随着车辆速度提高, 移动荷载在桥上的停留时间变短,所需表示移动荷 载特征的非零元素变少。

method							
-							

不同车辆速度的识别结果

influence of vehicle aread on th

表1

The





2.3 噪声水平的影响

测点位置固定,车辆速度为20 m/s时,4种噪声水 平分别为3%、5%、10%和15%的组合工况时,在每种 工况下进行10次独立重复试验,相应的识别结果见 表2,识别曲线中以10%的噪声水中试验为例,如图4 所示。

表2 噪声水平对本方法的影响

 Table 2
 The effect of noise level on the proposed method

0/

				70
亡日	识别结果相对百分误差			
د حر	3	5	10	15
1	3.844 4	4.941 7	8.859 0	10.727 8
2	3.947 3	5.009 8	6.534 8	10.347 3
3	3.521 1	5.111 8	6.459 0	10.129 8
4	4.243 1	4.700 5	6.769 1	9.557 2
5	3.488 9	5.085 3	7.286 2	10.562 7
6	3.951 7	5.293 6	7.054 5	9.156 7
7	4.136 4	4.976 3	6.337 8	9.298 3
8	3.818 0	5.033 2	7.664 5	10.117 7
9	3.941 1	4.863 8	8.139 7	9.719 0
10	3.939 1	4.752 6	6.864 2	10.165 4
平均值	3.883 1	4.976 9	7.196 9	9.978 2



图4 噪声水平10%移动荷载识别结果

Fig.4 Identification result of moving force at the 10% noise level

由表2可知,在4种噪声工况下,本方法识别结 果的相对误差均值在10%内。从图4可以看出,识 别荷载曲线与真实荷载曲线吻合度较高,仅曲线两 端误差相对较大。表明:该方法识别精度较高,受 噪声水平影响较小,具有良好的噪声鲁棒性。

2.4 测点位置组合的影响

当车辆速度为20 m/s、噪声水平为5%时,不同 测点组合共7种工况下,相应的识别结果见表3,其 中L为梁长。以工况1、工况5、工况7为例绘制识别 曲线,如图5所示。

表3 测点位置组合对本方法的影响

 Table 3
 The influence of the combination of measuring points on the proposed method

工况	测点组合	系统矩阵 H 的 维数	相对百分误差/%
工况1	<i>L</i> /4	2 000×401	8.432 2
工况2	L/2	2 000×401	10.847 0
工况3	<i>3L</i> /4	2 000×401	9.351 5
工况4	L/4 L/2	4 000×401	6.450 2
工况5	L/4_3L/4	4 000×401	5.121 3
工况6	L/2_3L/4	4 000×401	6.475 0
工况 7	L/4_L/2_3L/4	6 000×401	5.057 4





Table 1

从表3和图5可知:①在弹性网络正则化识别 过程中,仅使用单测点的识别精度明显低于使用双 测点和三测点的,原因是在仪器精密、测量准确的 情况下,多测点测量可以获取更多有助于提高识别 精度的精准信息。②随着测点个数增加,识别精度 提高不明显。原因是在测点获取的信息足够时,一 次低水平的测量反而会降低整体的识别精度。③ 系统矩阵H的维数与测点个数呈正比例关系,原因 是测点提取的信息随测点个数的增加而增多,导致 采样点数和荷载基函数的数目均增加,也增加了计 算机运算的工作量。④当测点个数相同时,识别结 果相对误差的差异不大,双测点识别误差在6.5%以 内,表明弹性网络正则化识别性能受测点位置的影 响较小。

3 试验验证

3.1 试验流程及主要参数

试验分为3个子试验:①模态试验,用软锤轻敲 试验梁,使其产生振动。通过北京东方所INV3060V(2) 型桥梁数据采集仪、DASP V11分析软件、丹麦 B&K4507-B-002加速度传感器,获取试验梁实测参 数,指导试验有限元模型的修正。②静态标定试 验,缓慢地在试验梁上加载等质量的4块砝码,获取 试验梁结构响应的时程曲线,以对BX120-3AA型短 应变片进行标定。③车桥耦合试验,控制遥控小车 在试验梁预设的轨道上运行,同时通过采集系统获 取试验梁结构响应等数据,采用MATLAB软件进 行建模分析。再将识别荷载和真实荷载进行对比, 验证弹性网络正则化识别法的有效性。车桥耦合 试验的有限模型如图6所示。





Fig.6 Modified finite element model of test beam 试验梁为 3.00 m(长)×0.30 m(宽)×0.06 m(高)
的单箱梁,质量 13.150 kg,采用亚克力板材制作,有 限元模型共划分为20个单元。在试验梁的横向1/3、1/2、2/3 和 3/4 处设置传感器测点,以测量试验梁的 弯矩响应,如图6所示。有限元模型经过模态试验、

静态标定试验实测数据修正后,梁长L=3 m,抗弯刚 度 $S_B=3.55\times10^3$ N·m²,线密度 $\rho=4.383$ 33 kg/m,由于 实际支撑情况与理想简支梁有差异,支座处改为弹 性支撑。计算频率与实测频率的对照见表4。

表4 修正模型计算频率与实测频率的对比

 Table 4
 Comparison between calculated frequency and measured frequency of modified model

模态阶数	模型频率/Hz	实测频率/Hz	相对百分误差/%
1	4.802 2	4.814 9	0.264 5
2	17.300 8	16.060 5	7.169 0
3	32.550 4	31.855 4	2.135 2
4	48.670 6	50.601 1	3.966 5

由表4可知,修正后模型的计算频率与实测值 接近,满足试验验证的要求。

3.2 单移动荷载模型

车辆荷载采用单移动荷载模型设置,移动荷载 作用位置选取车辆前后轴连线的中点。从车辆前 轴上桥开始计时,到车辆后轴下桥计时结束,截取 相应时段内测点响应识别移动荷载。选取L/3、L/2和 2L/3 三个位置的测点,其获取的响应信息用于识别 移动荷载。剩余的3L/4测点响应信息用于实测响 应和重构响应之间的对比,评估分析识别结果的可 信度。

采用试验梁有限元模型的前4阶模态信息 计算结构响应,前4阶模态阻尼比修正为3%,试 算确定试验梁模型最优加权系数 $\omega=0.1$ 。车桥 耦合试验工况为:移动载荷在桥上的通过时间 $T=1.764\,648\,437\,5$ s,选定函数的基本频率 $\Delta\omega=\pi$ Hz, 载荷字典原子个数 $n_i=354$,移动载荷在桥上运行的 速度v=1.7001 m/s。其余参数均选用本研究中弹性 网络正则化使用的参数,采用快速迭代收缩阈值算 法求解识别方程。

3.3 弹性网络正则化识别试验验证

在修正试验梁模型后,弹性网络正则化移动荷 载识别结果如图7所示。从图7可以看出,①移动 荷载识别结果基本在小车真实质量附近上下波动。 原因是小车质量引起的静态分量在移动荷载信号 成分中占主要部分。②识别结果的具体数值均大 于等于0。原因是小车与桥面之间不可能存在拉 力。③当移动荷载的作用位置靠近试验梁支座时, 识别精度相对较低。原因是移动荷载在该区域引 起的结构响应相对较小,容易与测量噪声一起被识 别算法剔除。

试验梁 3L/4 处的重构响应与实测响应之间的 对比如图 8 所示。从图 8 可以看出,在2个试验工况 中,试验梁 3L/4 的重构响应与实测响应吻合度较 高。表明:移动荷载识别结果的可信度较高,但应 当注意的是,这并不意味着移动荷载识别结果完全 契合全梁的真实情况。

若采用单移动荷载模拟试验小车,在各试验工 况中,弹性网络正则化识别法能有效地识别桥上移 动荷载,识别结果具有一定的可信度。





Fig.7 Experimental verification of elastic network regularization recognition



Fig.8 Comparison of measured and reconstructed responses at the position of the 3L/4

4 结论

1) 弹性网络正则化识别法在15、20、25、30、35 和40 m/s的6个车辆速度工况下,识别结果的相对 误差均在6.5%以内。表明本方法识别精度受车辆 速度影响较小。识别向量中,非零元素个数始终小 于总元素个数,表明该方法识别结果的稀疏性 较好。

 2)弹性网络正则化识别法在噪声水平分别为 3%、5%、10%和15%4种工况下,10次独立试验均 值识别结果的相对误差均在10%以内。表明:该方 法的识别精度受噪声影响较小,具有一定的噪声鲁 棒性。

3)当弹性网络正则化识别法测点个数相同时, 识别结果的相对百分误差较接近。表明:该方法受 测点位置的影响较小。其中,单测点识别精度最 低,双测点识别精度与三测点的接近,识别结果的 相对误差均在6.5%以内。表明:该方法在采用双测 点或三测点时,识别精度均达到较高水平。

4) 通过数值分析案例和基于试验实测参数修 正的MATLAB模型,验证了采用单移动荷载模型弹 性网络正则化识别法的有效性,在不同工况中适应 性均较强,具有较好的工程应用前景。

参考文献(References):

- [1] 苏万钦,李睿,刘海证,等.山区低等级公路桥梁疲劳荷载谱研究[J].交通科学与工程,2020,36(2):79-84.
 (SU Wanqin, LI Rui, LIU Haizheng, et al. Study on fatigue load spectrum of low-grade highway bridge in mountain area [J]. Journal of Transport Science and Engineering, 2020, 36(2):79-84. (in Chinese))
- [2] 赵少杰,肖仕伟,任伟新.基于WIM数据的公路汽车荷载统计特征研究[J].公路与汽运,2016(6):48-50.
 (ZHAO Shaojie, XIAO Shiwei, REN Weixin.Research on statistical characteristics of highway vehicle load based on Wim data[J]. Road and Motor Transport, 2016(6): 48-50.(in Chinese))
- [3] MOSES F. Weigh-in-motion system using instrumented bridges [J]. Transportation Engineering Journal, 1979, 105(3):233-249.
- [4] 张伟超,赵华,杜铁,等.基于MFI理论的BWIM系统车辆轴重识别研究[J].公路工程,2019,44(2):240-247.
 (ZHANG Weichao, ZHAO Hua, DU Tie, et al. Research on vehicle axle load identification based on MFI theory in BWIM system [J]. Chinese Journal of Highway Engineering,2019,44(2):240-247.(in Chinese))
- [5] LAW S S, CHAN T H T, ZENG Q H, et al. Moving force identification: A time domain method [J]. Journal of Sound and Vibration, 1997, 201(1): 1 - 22.
- [6] CHAN T H T, LAW S S, YUNG T H, et al. An interpretive method for moving force identification [J]. Journal of Sound and Vibration, 1999, 219(3): 503 - 524.
- [7] FITZGERALD P C, SEVILLANO E, OBRIEN E J, et al. Bridge weigh-in-motion using a moving force identifica-

tion algorithm [J]. Procedia Engineering, 2017, 199: 2955-2960.

- [8] PAN C D, YU L, LIU H L. Identification of moving vehicle forces on bridge structures via moving average Tikhonov regularization [J]. Smart Materials and Structures, 2017, 26(8): 85041.
- [9] ZHONG J W, LIU H L, YU L. Sparse regularization for traffic load monitoring using bridge response measurements[J]. Measurement, 2019, 131: 173 - 182.
- [10] LIU H L, YU L, LUO Z W, et al. Compressed sensing for moving force identification using redundant dictionaries
 [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2020, 138: 106535.
- [11] QIAO B J, LIU J J, LIU J X, et al. An enhanced sparse regularization method for impact force identification [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 126: 341-367.
- [12] QIAO B J, MAO Z, LIU J X, et al. Group sparse regularization for impact force identification in time domain [J]. Journal of Sound and Vibration, 2019, 445: 44-63.
- [13] QIAO B J, AO C Y, MAO Z, et al. Non-convex sparse regularization for impact force identification [J]. Journal of Sound and Vibration, 2020, 477: 115311.
- [14] PAN C D, YU L, LIU H L, et al. Moving force identification based on redundant concatenated dictionary and weighted 11-norm regularization [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2018, 98: 32-49.

- [15] PAN C D, YE X J, ZHOU J Y, et al. Matrix regularization-based method for large-scale inverse problem of force identification [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2020, 140: 106698.
- [16] 刘建伟,崔立鹏,刘泽宇,等.正则化稀疏模型[J].计算机学报,2015,38(7):1307-1325.(LIU Jianwei,CUI Lipeng,LIU Zeyu, et al. Regularized sparse model[J].
 Chinese Journal of Computer Science, 2015,38(7): 1307-1325.(in Chinese))
- [17] 潘楚东.桥梁移动荷载与结构损伤稀疏正则化识别
 [D].广州:暨南大学,2018.(PAN Chudong.Identification of bridge moving loads and structural damage based on sparse regularization [D]. Guangzhou: Jinan University,2018.(in Chinese))
- [18] CHUNG R S W, SO M K P, CHU A M Y, et al. Regularization of Bayesian quasi-likelihoods constructed from complex estimating functions [J]. Computational Statistics and Data Analysis, 2020, 150: 106977.
- [19] AUCEJO M, SMET O D. An optimal Bayesian regularization for force reconstruction problems [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 126: 98-115.
- [20] DING Z H, LI J, HAO H. Structural damage identification using improved Jaya algorithm based on sparse regularization and Bayesian inference [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 132: 211-231.
 (责任编辑:欧兆虎;校对:罗容 李脉;英文编辑:陈璐)