

文章编号:1674-599X(2022)03-0094-06

考虑剪切变形的变截面构件的变形计算

滑硕,周东华,王鹏,苏骁,刘阳杰,何颖成

(昆明理工大学 建筑工程学院,云南 昆明 650500)

摘 要:变截面构件在工程中应用较为广泛,但变形计算则较为复杂。本研究采用拉格朗日插值函数表示单元内的惯性矩和面积的变化,再分别用埃尔米特和拉格朗日插值函数计算单元内的弯曲变形和剪切变形,并根据势能驻值原理得到适用于多种变截面构件的变截面弯曲单元刚度矩阵,最后通过分析力的平衡条件和构件挠度的几何关系,得到考虑剪切变形的变截面弯曲单元刚度矩阵。采用自编的有限元程序与ANSYS分别对算例进行计算分析,讨论圆形构件和环形抵抗剪切变形的影响程度。研究结果表明:算例验证了单元刚度矩阵的正确性,对比发现由变截面构件组成的结构受力性能优于等截面构件组成的结构。

关键词:变截面;插值函数;剪切变形;单元刚度矩阵

中图分类号:TU318

文献标志码:A

Deformation calculation of variable cross section member considering shear deformation

HUA Shuo, ZHOU Donghua, WANG Peng, SU Xiao, LIU Yangjie, HE Yingcheng

(Construction Engineering College, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China)

Abstract: Variable cross-section member are widely used in engineering. However, the deformation calculation is complicated. In this paper, the Lagrange interpolation function was used to reflect the change of inertia moment and area in the element. The Hermite and Lagrange interpolation functions were then used to calculate the bending deformation and shear deformation. Consequently, the stiffness matrix of variable cross-section bending element, suitable for different variable cross-section member, could be obtained according to the principle of potential energy standing value. Finally, the stiffness matrix of variable cross-section bending element could be obtained considering shear deformation, while the balance condition of force and the geometric relationship of member deflection were analyzed. The self-made finite element program and the ANSYS were used to calculate the example, verifying the correctness of the element stiffness. It was found that the mechanical performance of structure composed of variable cross-section is better than that of the structure composed of equal cross-section.

Key words: variable section; interpolation function; shear deformation; element stiffness matrix

变截面构件在桥梁^[1]等工程中应用较为广泛,但考虑到变截面的刚度变化和剪切变形的影响,解析计算变截面构件比较复杂。针对该问题,许多学者进行了许多研究。汤华涛等人^[2]采用传递矩阵法

进行了变截面构件的研究。周期源等人^[3]运用能量法计算变截面构件的变形。刘悦等人^[4]采用等截面等效的方法对变截面构件进行了变形计算。传光红等人^[5]运用势能驻值原理对变截面Timoshenko梁

收稿日期:2021-04-09

基金项目:国家自然科学基金项目(51668027)

作者简介:滑硕(1995—),男,昆明理工大学硕士生。

进行了研究。但这些成果实用性不强,有的忽略了剪切变形的影响,有的在计算不同支承情况时会遇到构件变形较为复杂的情况,有的适用情况较为单一^[6-11]。

本研究分别采用四次和二次拉格朗日插值函数表示惯性矩和面积的变化。剪切和弯曲位移模式选取一次拉格朗日插值函数和三次埃尔米特插值函数^[9]。采用势能驻值原理,推导出变截面的弯曲单元刚度矩阵。然后通过剪力的平衡条件与构件挠度的几何关系,得出考虑剪切变形的变截面单元刚度矩阵。作者自编势能驻值原理推导单元刚度矩阵算法进行计算,并将自编算法的结果与ANSYS的进行对比分析。

1 单元刚度矩阵的推导

1.1 插值函数的选取

1.1.1 面积插值函数的选取

选取二次拉格朗日插值函数表示变截面构件的面积变化。构件中任意一点的面积极为形函数向量 $\mathbf{N}_i^{(e)}$ 与面积向量 $\mathbf{a}_A^{(e)}$ 的点积,其局部坐标的表达式为:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(e)}(\xi) &= \mathbf{N}_i^{(e)}(\xi) \cdot \mathbf{a}_A^{(e)} \\ &= [\mathbf{N}_1^{(e)}(\xi), \mathbf{N}_2^{(e)}(\xi), \mathbf{N}_3^{(e)}(\xi)] \cdot \\ &\quad (\mathbf{A}_1^{(e)}, \mathbf{A}_2^{(e)}, \mathbf{A}_3^{(e)})^T \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{a}_A^{(e)} = [\mathbf{A}_1^{(e)}, \mathbf{A}_2^{(e)}, \mathbf{A}_3^{(e)}]^T$,

$$\mathbf{N}_i^{(e)} \begin{cases} \mathbf{N}_1^{(e)}(\xi) = \xi(1-\xi)/2 \\ \mathbf{N}_2^{(e)}(\xi) = (1+\xi)(1-\xi) \\ \mathbf{N}_3^{(e)}(\xi) = \xi(1+\xi)/2 \end{cases}$$

1.1.2 惯性矩插值函数的选取

选取四次拉格朗日插值函数,表示变截面构件惯性矩的变化。构件中任一点的惯性矩 $\mathbf{I}^{(e)}$ 为形函数向量 $\mathbf{N}_i^{(e)}$ 与惯性矩向量 $\mathbf{a}_I^{(e)}$ 的点积,其局部坐标表达式为:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^{(e)}(\xi) &= \mathbf{N}_i^{(e)}(\xi) \mathbf{a}_I^{(e)} \\ &= [\mathbf{N}_4^{(e)}(\xi), \mathbf{N}_5^{(e)}(\xi), \mathbf{N}_6^{(e)}(\xi), \mathbf{N}_7^{(e)}(\xi), \\ &\quad \mathbf{N}_8^{(e)}(\xi)] \cdot [\mathbf{I}_1^{(e)}, \mathbf{I}_2^{(e)}, \mathbf{I}_3^{(e)}, \mathbf{I}_4^{(e)}, \mathbf{I}_5^{(e)}]^T \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $\mathbf{a}_I^{(e)} = [\mathbf{I}_1^{(e)}, \mathbf{I}_2^{(e)}, \mathbf{I}_3^{(e)}, \mathbf{I}_4^{(e)}, \mathbf{I}_5^{(e)}]^T$,

$$\mathbf{N}_i^{(e)} \begin{cases} \mathbf{N}_4^{(e)}(\xi) = 2\xi(\xi-1)(\xi-\frac{1}{2})(\xi+\frac{1}{2})/3 \\ \mathbf{N}_5^{(e)}(\xi) = -8\xi(\xi-1)(\xi+1)(\xi-\frac{1}{2})/3 \\ \mathbf{N}_6^{(e)}(\xi) = 4(\xi-1)(\xi+1)(\xi-\frac{1}{2})(\xi+\frac{1}{2}) \\ \mathbf{N}_7^{(e)}(\xi) = -8\xi(\xi-1)(\xi+1)(\xi+\frac{1}{2})/3 \\ \mathbf{N}_8^{(e)}(\xi) = 2\xi(\xi+1)(\xi-\frac{1}{2})(\xi+\frac{1}{2})/3 \end{cases}$$

1.2 位移模式的选取

根据单元自由度个数选取位移模式。自由度包含左右两端的位移:剪切位移 $w_{s,1}^{(e)}, w_{s,2}^{(e)}$; 弯曲位移 $w_{b,1}^{(e)}, w_{b,2}^{(e)}$; 转角 $\theta_1^{(e)}, \theta_2^{(e)}$ 。由于构件截面尺寸随长度变化,因此其抗弯刚度 $S_{B,x} = EI(x)$ 及抗剪刚度 $S_{S,x} = GA(x)$ 也随长度变化。变截面构件力学模型如图1所示。

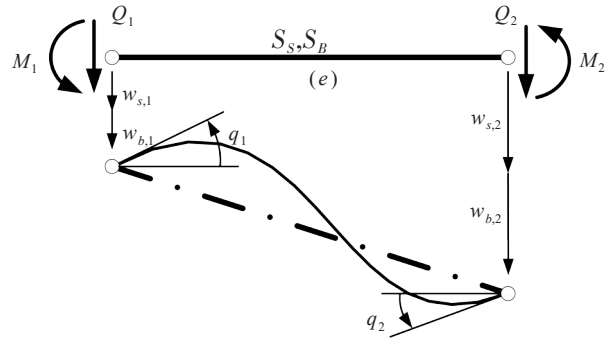


图1 变截面构件力学模型

Fig.1 Mechanical model of variable section beam

1.2.1 剪切位移模式的选取

考虑剪切变形,每单元有2个自由度,选用线性拉格朗日插值函数。构件中任意一点的剪切位移 $w_s^{(e)}$ 为形函数向量 $\mathbf{N}_{s,i}^{(e)}$ 与剪切位移向量 $\mathbf{a}_s^{(e)}$ 的点积,其局部坐标表达式为:

$$\begin{aligned} w_s^{(e)}(\xi) &= \mathbf{N}_i^{(e)}(\xi) \cdot \mathbf{a}_s^{(e)} \\ &= [\mathbf{N}_9^{(e)}(\xi), \mathbf{N}_{10}^{(e)}(\xi)] \cdot [\mathbf{w}_{s,1}^{(e)}, \mathbf{w}_{s,2}^{(e)}]^T \end{aligned} \quad (3)$$

其中, $\mathbf{a}_s^{(e)} = [\mathbf{w}_{s,1}^{(e)}, \mathbf{w}_{s,2}^{(e)}]^T$,

$$\mathbf{N}_i^{(e)} \begin{cases} \mathbf{N}_9^{(e)}(\xi) = (1-\xi)/2 \\ \mathbf{N}_{10}^{(e)}(\xi) = (1+\xi)/2 \end{cases}$$

由于形函数在局部坐标中选取,需要统一坐标形式后才能计算,整体坐标与局部坐标的转换关系式为:

$$\begin{cases} x = \frac{l^{(e)}}{2} (1 + \xi) \\ \left(\frac{dw_s}{dx} \right)^{(e)} = \frac{2}{l^{(e)}} \left(\frac{dw_s}{d\xi} \right)^{(e)} \end{cases} \quad (4)$$

坐标变换后的应变函数由式(3)~(4)联立可得:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{2}{l^{(e)}} \left[\frac{dN_9^{(e)}}{d\xi}, \frac{dN_{10}^{(e)}}{d\xi} \right] \cdot \mathbf{a}_s^{(e)} = \frac{2}{l^{(e)}} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \cdot \mathbf{a}_s^{(e)} \quad (5)$$

$$= [B_{s,1}^{(e)} \cdot B_{s,2}^{(e)}]^T \cdot \mathbf{a}_s^{(e)} = [B_s^{(e)}]^T \cdot \mathbf{a}_s^{(e)}$$

1.2.2 弯曲位移模式的选取

考虑弯曲情况,每单元有4个自由度,又因转角为挠度的导数,选取三次埃尔米特插值多项式函数^[8]。构件中任意一点的横向位移 $w_b^{(e)}$ 为形函数向量 $N_{b,i}^{(e)}$ 与横向位移向量 $\mathbf{a}_b^{(e)}$ 的点积,其局部坐标表达式为:

$$\begin{aligned} w_b^{(e)}(\xi) &= N_{b,i}^{(e)}(\xi) \cdot \mathbf{a}_b^{(e)} \\ &= [N_{b,1}^{(e)}(\xi), \bar{N}_{b,1}^{(e)}(\xi), N_{b,2}^{(e)}(\xi), \bar{N}_{b,2}^{(e)}(\xi)] \cdot \\ &\quad [w_{b,1}^{(e)}, \theta_1^{(e)}, w_{b,2}^{(e)}, \theta_2^{(e)}]^T \end{aligned} \quad (6)$$

其中, $\mathbf{a}_b^{(e)} = [w_{b,1}^{(e)}, \theta_1^{(e)}, w_{b,2}^{(e)}, \theta_2^{(e)}]^T$,

$$N_{b,i}^{(e)} = \begin{cases} N_{b,1}^{(e)}(\xi) = (2 - 3\xi + \xi^3)/4 \\ \bar{N}_{b,1}^{(e)}(\xi) = (1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)/4 \\ N_{b,2}^{(e)}(\xi) = (2 + 3\xi - \xi^3)/4 \\ \bar{N}_{b,2}^{(e)}(\xi) = (-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)/4 \end{cases} \quad \circ$$

整体坐标与局部坐标的变换关系式为:

$$\begin{cases} x = \frac{l^{(e)}}{2} (1 + \xi) \\ \left(\frac{d^2 w_b}{dx^2} \right)^{(e)} = \frac{4}{(l^{(e)})^2} \left(\frac{d^2 w_b}{d\xi^2} \right)^{(e)} \end{cases} \quad (7)$$

坐标变换后的曲率由式(6)~(7)式联立可求得:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_b}{dx^2} &= \frac{4}{[l^{(e)}]^2} \left[\frac{d^2 N_{b,1}^{(e)}}{d\xi^2}, \frac{d^2 \bar{N}_{b,1}^{(e)}}{d\xi^2}, \frac{d^2 N_{b,2}^{(e)}}{d\xi^2}, \frac{d^2 \bar{N}_{b,2}^{(e)}}{d\xi^2} \right] \cdot \mathbf{a}_b^{(e)} \\ &= \left\{ \frac{6\xi}{[l^{(e)}]^2}, \frac{-1+3\xi}{l^{(e)}}, \frac{-6\xi}{[l^{(e)}]^2}, \frac{1+3\xi}{l^{(e)}} \right\} \cdot \mathbf{a}_b^{(e)} \\ &= [B_1^{(e)}, \bar{B}_1^{(e)}, B_2^{(e)}, \bar{B}_2^{(e)}] \cdot \mathbf{a}_b^{(e)} = [B_b^{(e)}] \cdot \mathbf{a}_b^{(e)} \end{aligned} \quad (8)$$

1.3 推导单元刚度矩阵

由势能驻值原理可知,势能驻值条件等价于平

衡条件。采用总势能对位移求偏导,得到单元刚度矩阵。

1.3.1 推导变截面剪切单元刚度矩阵

由于剪应力为非均匀分布,需引入校正因子 $k^{[10]}$,推导出变截面剪切单元刚度矩阵在均布荷载 $q^{(e)}$ 作用下的剪切总势能 $\Pi_s^{(e)}$,其过程为:

$$\begin{aligned} \Pi_s^{(e)} &= \int_0^{l^{(e)}} \frac{S_s^{(e)}}{2k} \cdot \left[\left(\frac{dw_s}{dx} \right)^{(e)} \right]^2 dx - \int_0^{l^{(e)}} q^{(e)} w_s^{(e)} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [\mathbf{a}_s^{(e)}]^T [B_s^{(e)}]^T \left[\frac{S_{s,\varepsilon}}{k} \right]^{(e)} [B_s^{(e)}] \\ &\quad [\mathbf{a}_s^{(e)}] \frac{l}{2} d\xi - \int_{-1}^1 [\mathbf{a}_s^{(e)}]^T [B_s^{(e)}]^T q^{(e)} \frac{l}{2} d\xi \end{aligned} \quad (9)$$

应用势能驻值条件,对式(9)求偏导,可得:

$$\frac{\partial \Pi_s^{(e)}}{\partial \mathbf{a}_s^{(e)}} = \mathbf{K}_s^{(e)} [\mathbf{a}_s^{(e)}] - f = 0 \quad (10)$$

则变截面剪切单元刚度矩阵 $\mathbf{K}_s^{(e)}$ 为:

$$\mathbf{K}_s^{(e)} = \frac{G(A_1 + 4A_2 + A_3)}{6kl} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

1.3.2 推导变截面弯曲单元刚度矩阵

弯曲总势能表达式为:

$$\begin{aligned} \Pi_b^{(e)} &= \int_0^{l^{(e)}} \frac{S_{B,x}^{(e)}}{2} \left[\left(\frac{d^2 w_b}{dx^2} \right)^{(e)} \right]^2 dx - \int_0^{l^{(e)}} q^{(e)} w_b^{(e)} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [\mathbf{a}_b^{(e)}]^T [B_b^{(e)}]^T S_{B,\varepsilon}^{(e)} [B_b^{(e)}] \\ &\quad [\mathbf{a}_b^{(e)}] \frac{l}{2} d\xi - \int_{-1}^1 [\mathbf{a}_b^{(e)}]^T N_{b,i}^{(e)} q^{(e)} \frac{l}{2} d\xi \end{aligned} \quad (12)$$

应用势能驻值条件,对式(13)求偏导,可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_b^{(e)}}{\partial \mathbf{a}_b^{(e)}} &= \int_{-1}^1 [B_b^{(e)}]^T S_{B,\varepsilon}^{(e)} [B_b^{(e)}] [\mathbf{a}_b^{(e)}] \frac{l}{2} d\xi - \\ &\quad \int_{-1}^1 N_{b,i}^{(e)} q^{(e)} \frac{l}{2} d\xi = \mathbf{K}_b^{(e)} [\mathbf{a}_b^{(e)}] - f = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

变截面弯曲单元刚度矩阵 $\mathbf{K}_b^{(e)}$ 为:

$$\mathbf{K}_b^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{6E[13I_1 + 32I_2 - 20I_3 + 32I_4 + 13I_5]}{35l^3} & \frac{2E[83I_1 + 200I_2 - 90I_3 + 88I_4 + 34I_5]}{105l^2} & -\frac{6E[13I_1 + 32I_2 - 20I_3 + 32I_4 + 13I_5]}{35l^3} & \frac{2E[34I_1 + 88I_2 - 90I_3 + 200I_4 + 83I_5]}{105l^2} \\ 0 & \frac{E[347I_1 + 880I_2 - 228I_3 + 208I_4 + 53I_5]}{315l} & -\frac{2E[83I_1 + 200I_2 - 90I_3 + 88I_4 + 34I_5]}{105l^2} & \frac{E[151I_1 + 320I_2 - 312I_3 + 320I_4 + 151I_5]}{315l} \\ 0 & 0 & \frac{6E[13I_1 + 32I_2 - 20I_3 + 32I_4 + 13I_5]}{35l^3} & -\frac{2E[34I_1 + 88I_2 - 90I_3 + 200I_4 + 83I_5]}{105l^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E[53I_1 + 208I_2 - 228I_3 + 880I_4 + 347I_5]}{315l} \end{bmatrix} \quad (14)$$

1.3.3 推导考虑剪切变形的变截面单元刚度矩阵

构件发生剪切变形时,构件挠度是由弯曲作用产生的挠度 w_b 和剪切变形引起的附加挠度 w_s 两部分叠加所得^[10],即:

$$w = w_b + w_s \quad (15)$$

由式(15)可知,每个节点有3个位移参数。运用剪力平衡条件和构件挠度几何关系,可将3个位移参数: $w_{b,i}, w_{s,i}, \theta_i (i = 1, 2)$, 化简为2个位移参数: $w_i, \theta_i (i = 1, 2)$ ^[10]。

为计算简便,令:

$$A = \frac{A_1 + 4A_2 + A_3}{6} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \phi_1 = \frac{6kE[13I_1 + 32I_2 - 20I_3 + 32I_4 + 13I_5]}{35l^2GA} \\ \phi_2 = \frac{2kE[83I_1 + 200I_2 - 90I_3 + 88I_4 + 34I_5]}{105lGA} \\ \phi_3 = \frac{2kE[34I_1 + 88I_2 - 90I_3 + 200I_4 + 83I_5]}{105lGA} \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{6E[13I_1 + 32I_2 - 20I_3 + 32I_4 + 13I_5]}{35l^3(1 + \phi_1)} & \frac{2E[83I_1 + 200I_2 - 90I_3 + 88I_4 + 34I_5]}{105l^2(1 + \phi_1)} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中,式(22)中 k_{22}, k_{24}, k_{44} 的表达式分别为:

$$\begin{aligned} k_{22} &= \frac{E(347I_1 + 880I_2 - 228I_3 + 208I_4 + 53I_5)}{315l} - \frac{2E[83I_1 + 200I_2 - 90I_3 + 88I_4 + 34I_5]\phi_2}{105l^2(1 + \phi_1)} \\ k_{24} &= \frac{E(151I_1 + 320I_2 - 312I_3 + 320I_4 + 151I_5)}{315l} - \frac{2E[83I_1 + 200I_2 - 90I_3 + 88I_4 + 34I_5]\phi_3}{105l^2(1 + \phi_1)} \\ k_{44} &= \frac{E(53I_1 + 208I_2 - 228I_3 + 880I_4 + 347I_5)}{315l} - \frac{2E(34I_1 + 88I_2 - 90I_3 + 200I_4 + 83I_5)\phi_3}{105l^2(1 + \phi_1)} \end{aligned}$$

进行二维任意方向梁单元计算时,需要式(14)、(17)与交换矩阵^[12]进行简单计算。

结构计算时,需要将推导的单元刚度矩阵式(14)、(17)组装成结构刚度矩阵,再将单元荷载向量组装成结构荷载向量。最后,利用结构刚度矩阵和与之对应的结构荷载向量,求解结构位移向量。

将式(16)、(17)与剪力平衡条件联立,可化简得到表达式:

$$w_{s,2} - w_{s,1} = \phi_1(w_{b,2} - w_{b,1}) - \phi_2\theta_1 - \phi_3\theta_2 \quad (18)$$

构件挠度的几何关系为^[10]:

$$w_2 - w_1 = w_{b,2} - w_{b,1} + w_{s,2} - w_{s,1} \quad (19)$$

联立式(18)~(19)可得:

$$w_{b,2} - w_{b,1} = \frac{1}{1 + \phi_1}(w_2 - w_1) + \frac{\phi_2}{1 + \phi_1}\theta_1 + \frac{\phi_3}{1 + \phi_1}\theta_2 \quad (20)$$

$$w_{s,2} - w_{s,1} = \frac{\phi_1}{1 + \phi_1}(w_2 - w_1) - \frac{\phi_2}{1 + \phi_1}\theta_1 - \frac{\phi_3}{1 + \phi_1}\theta_2 \quad (21)$$

然后由式(11)、(14)、(20)、(21)式,可推导出考虑剪切变形的变截面单元刚度矩阵 $K^{(e)}$:

$$K^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{6E[13I_1 + 32I_2 - 20I_3 + 32I_4 + 13I_5]}{35l^3(1 + \phi_1)} & \frac{2E[83I_1 + 200I_2 - 90I_3 + 88I_4 + 34I_5]}{105l^2(1 + \phi_1)} & \frac{2E[34I_1 + 88I_2 - 90I_3 + 200I_4 + 83I_5]}{105l^2(1 + \phi_1)} \\ \frac{2E[83I_1 + 200I_2 - 90I_3 + 88I_4 + 34I_5]}{105l^2(1 + \phi_1)} & k_{22} & k_{24} \\ \frac{6E[13I_1 + 32I_2 - 20I_3 + 32I_4 + 13I_5]}{35l^3(1 + \phi_1)} & \frac{2E[34I_1 + 88I_2 - 90I_3 + 200I_4 + 83I_5]}{105l^2(1 + \phi_1)} & k_{44} \end{bmatrix} \quad (22)$$

2 算法验证

运用本方法对变截面的圆形构件和环形构件进行挠度计算,检验本方法的正确性,分析跨高比对剪切变形占总挠度比重的影响,以及比较这两种构件抵抗剪切变形的能力。

2.1 算例1

变截面圆形悬臂梁的计算简图如图2所示。其中,固定端 $\varphi_1=60$ cm,悬臂端 $\varphi_2=40$ cm, $L=200$ cm,

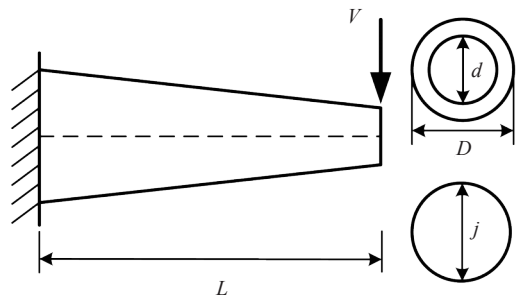


图2 计算简图及截面标注

Fig.2 Calculation sketch and section marking

$V=100\text{ kN}$ 。变截面圆形梁在考虑剪切变形影响情况下,分别用本方法和 ANSYS 计算其弯剪变形,计算结果见表 1。

表 1 本方法与 ANSYS 计算弯剪变形对比

Table 1 The deflection comparison between this method and ANSYS

计算方法	弯剪变形/mm
本方法	0.314
ANSYS	0.315
相对误差	0.317%

两种方法计算所得变形的相对误差均小于 1%,精度满足要求。

2.2 算例 2

变截面圆形梁和变截面环形梁的计算简图如图 2 所示。其中, $V=100\text{ kN}$; $\bar{\varphi}$ 、 $\bar{D}$ 分别为变截面圆形梁和变截面环形梁的平均直径, $\bar{\varphi}=(\varphi_1+\varphi_2)/2$, $\bar{D}=(D_1+D_2)/2$; 设 λ 为跨高比, $\lambda_1=L/\bar{\varphi}$ 和 $\lambda_2=L/\bar{D}$, 变截面圆形梁的长度 L_1 分别为: $3\bar{\varphi}$ 、 $4\bar{\varphi}$ 、 $5\bar{\varphi}$; 变截面环形梁的长度 L_2 分别为: $3\bar{D}$ 、 $4\bar{D}$ 、 $5\bar{D}$, 用本方法计算两种变截面梁的挠度:

- 1) 变截面圆形梁截面尺寸与算例 1 的一致。
- 2) 变截面环形梁截面尺寸为: 固定端 $D_1=60\text{ cm}$, $d_1=50\text{ cm}$, 悬臂端 $D_2=40\text{ cm}$, $d_2=30\text{ cm}$ 。

验证变截面圆形构件和环形构件的跨高比对剪切变形占总挠度比重的影响。

两种截面梁的计算结果见表 2~3。

表 2 变截面圆形构件跨高比对剪切变形的影响

Table 2 Influence of span height ratio of variable circular cross section on shear deformation

λ_1	3.0	4.0	5.0	6.0	6.5
纯弯 w_b/mm	0.126	0.299	0.585	1.011	1.285
弯剪 w/mm	0.137	0.314	0.603	1.033	1.309
w/w_b	1.087	1.050	1.031	1.022	1.019

由表 2 可知,变截面圆形构件剪切变形占总挠度的比重会随着跨高比的增加而减小。当 $\lambda<4$ 时,剪切变形对梁挠度的影响大于 5%,此时不能忽视剪切变形的影响。因此,可以将 $\lambda=4$ 作为变截面圆形构件是否考虑剪切变形影响的阈值。

表 3 变截面环形构件跨高比对剪切变形的影响

Table 3 Influence of span height ratio of variable annular cross section on shear deformation

λ_2	3.0	4.0	5.0	6.0	6.5
纯弯 w_b/mm	0.225	0.533	1.042	1.801	2.290
弯剪 w/mm	0.279	0.605	1.132	1.908	2.406
w/w_b	1.240	1.135	1.086	1.059	1.051

由表 3 可知,对于变截面环形构件,当 $\lambda<6.5$ 时,剪切变形对构件挠度的影响大于 5%,此时不能忽视剪切变形的影响。因此,可以将 $\lambda=6.5$ 作为变截面环形构件是否考虑剪切变形影响的阈值。

由表 2~3 可知,相同跨高比时,环形构件受剪切变形的影响较大。因此,剪切变形对两种形状构件的影响不同。

2.3 算例 3

对比变截面柱子与等截面柱子情况下的刚架侧移。结构计算如图 3 所示,左右矩形柱截面尺寸相同,梁截面尺寸均为: $b=40\text{ cm}$, $h=40\text{ cm}$, 用本方法计算两种情况的侧移 s :

- 1) 变截面矩形柱尺寸: 柱顶 $b_1=30\text{ cm}$, $h_1=30\text{ cm}$; 柱脚 $b_2=30\text{ cm}$, $h_2=60\text{ cm}$ 。
- 2) 等截面矩形柱尺寸为: $b_3=30\text{ cm}$, $h_3=45\text{ cm}$ 。

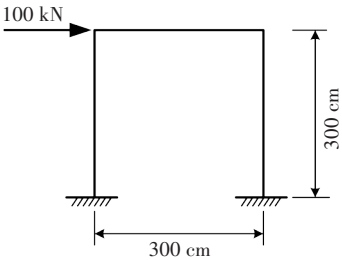


图 3 结构计算

Fig.3 Structural calculation

侧移 s 计算结果见表 4。

表 4 刚架侧移计算

Table 4 Lateral displacement calculation of rigid frame

刚架柱截面形式	s/mm
变截面矩形柱	0.223
等截面矩形柱	0.258
等截面侧移/变截面侧移	1.157

由表 4 可知,材料用量相同,跨高比相等的情况下,等截面柱子刚架的侧移比变截面柱子刚架的高 15.7%。表明:变截面矩形柱能让刚度和荷载更好

地匹配,从而使得变截面组成结构的受力性能优于等截面组成结构的。

3 结论

采用本方法对剪切变形的变截面构件的计算与分析,得到结论为:

1) 推导的单元刚度矩阵适用于矩形、圆形、环形等多种变截面构件的变形计算。

2) 使用 ANSYS 对推导的变截面单元刚度矩阵的计算精度进行了检验,相对误差在 1% 以内,验证了本单元刚度算法的正确性。

3) 通过计算比较变截面圆形、环形构件的抵抗剪切变形,得到不考虑剪切变形的圆形和环形变截面的临界跨高比的阈值,它们分别是 $\lambda = 4$ 和 $\lambda = 6.5$ 。

4) 对变截面构件和等截面构件组成的结构进行变形计算,对比结果发现,变截面结构的刚度和荷载匹配更加合理,材料能够得到更充分的利用。

参考文献(Reference)

- [1] 肖勇刚,马千川.大跨度上承式钢管砼变截面桁架拱桥抗震分析[J].公路与汽运,2021(1):109-113,117.(XIAO Yonggang, MA Qianchuan. Seismic analysis of long-span deck concrete filled steel tubular truss arch bridge with variable cross section [J]. Highways & Automotive Applications, 2021(1):109-113,117.(in Chinese))
- [2] 汤华涛,吴新跃.基于有限元的空间变截面梁传递矩阵[J].南京理工大学学报,2014,38(1):78-82.(TANG Huatao, WU Xinyue. Analysis of transfer matrix of space non-uniform beam based on finite element method [J]. Journal of Nanjing University of Science and Technology, 2014,38(1):78-82.(in Chinese))
- [3] 周期源,高轩能.考虑剪切变形影响时变截面梁的挠度计算[J].南昌大学学报(工科版),2006,28(3):295-298.(ZHOU Qiyuan, GAO Xuanneng. Deflection calculation of tapered beam with shear effects by energy method [J]. Journal of Nanchang University (Engineering & Technology), 2006, 28(3): 295-298.(in Chinese))
- [4] 刘悦,王立平.基于刚度矩阵的空间变截面梁简化问题[J].清华大学学报(自然科学版),2008,48(11):1915-1918.(LIU Yue, WANG Liping. Simplification of a spatial beam with variable cross sections based on the stiffness matrix [J]. Journal of Tsinghua University (Science and Technology), 2008,48(11):1915-1918.(in Chinese))
- [5] 传光红,陈以一,童根树.变截面 Timoshenko 梁的单元刚度矩阵[J].计算力学学报,2014,31(2):265-272.(CHUAN Guanghong, CHEN Yiyi, TONG Genshu. Element stiffness matrix for Timoshenko beam with variable cross-section [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2014,31(2):265-272.(in Chinese))
- [6] 孟丽霞,陆念力,刘士明.惯性矩二次变化变截面梁柱几何非线性分析[J].哈尔滨工业大学学报,2014,46(3):20-25.(MENG Lixia, LU Nianli, LIU Shiming. Geometric nonlinear analysis of tapered beam with inertia moment vary quadratic [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2014,46(3):20-25.(in Chinese))
- [7] 张军锋,李杰,尹会娜,等.考虑剪切变形的变截面欧拉梁单元刚度矩阵[J].结构工程师,2020,36(2):43-50.(ZHANG Junfeng, LI Jie, YIN Huina, et al. Element stiffness matrix of tapered Euler beam element including shear deformation [J]. Structural Engineers, 2020,36(2):43-50.(in Chinese))
- [8] 王利平.一种变截面悬臂梁挠度计算方法研究[J].河南科技,2018(22):122-124.(WANG Liping. Method of deflection calculation of cantilever beam with variable cross section [J]. Henan Science and Technology, 2018(22):122-124.(in Chinese))
- [9] HINTON E, OWEN D R J. An introduction to finite element computations [M]. Swansea (Wales): Pineridge Press, 1979.
- [10] 王勖成.有限单元法[M].北京:清华大学出版社,2003:311-315.(WANG Xucheng. Finite element method [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003:311-315.(in Chinese))
- [11] 刘意,王国华,李年航,等.桥墩防撞等级评估方法及其应用[J].交通科学与工程,2020,36(4):88-93.(LIU Yi, WANG Guohua, LI Nianhang, et al. Assessment method and application of anti-collision grade of bridge pier [J]. Journal of Transport Science and Engineering, 2020, 36(4):88-93.(in Chinese))
- [12] (美)洛根.有限元方法基础教程(国际单位制版)[M].第5版.伍义生,吴永礼,译.电子工业出版社,2014:153-197.(LOGAN D L. Basic course of finite element method (international unit plate making) [M]. 5th edition. Translated by WU Yisheng, WU Yongli. Electronic Industry Press, 2014:153-197.(in Chinese))

(责任编辑:罗容;校对:李脉 欧兆虎;英文编辑:陈璐)