

DOI: 10.16544/j.cnki.cn43-1494/u.20210607001

文章编号: 1674-599X(2023)01-0052-07

考虑剪切变形和二阶效应的变截面构件的计算

苏晓,周东华,王鹏,滑硕,刘阳杰,何颖成

(昆明理工大学 建筑工程学院,云南 昆明 650500)

摘 要:同时考虑剪切变形和二阶效应来解析计算杆件的临界力,是求解变系数临界微分方程的难题。本研究采用有限元法推导了变截面单元刚度矩阵。采用三次 Hermite 插值函数和三次拉格朗日插值函数来计算单元内的弯曲变形和惯性矩变化。采用线性插值函数来计算单元内的剪切变形和截面面积变化。利用最小势能原理对总势能进行变分,系统给出了计入弯曲变形、剪切变形以及轴力二阶效应的变截面构件单元刚度矩阵。最后,用自编的有限元程序对算例进行验证。研究结果表明:本算法的计算精度较高,还可分析二阶位移放大系数以及变截面门式刚架立柱之间的支援作用。

关键词:变截面单元;有限元;单元刚度矩阵;剪切变形;二阶效应

中图分类号: TU311

文献标志码: A

Calculation of tapered members considering shear deformation and second order effect

SU Xiao, ZHOU Donghua, WANG Peng, HUA Shuo, LIU Yangjie, HE Yingcheng

(Faculty of Civil Engineering and Architecture, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China)

Abstract: Simultaneously considering shear deformation and second-order effects to analytically calculate the critical load of a structural member is a challenging task in solving the variable coefficient critical differential equation. In this study, a finite element method was used to derive the stiffness matrix of a variable cross-section element. Third-order Hermite interpolation functions and third-order Lagrange interpolation functions were used to calculate the bending deformation and inertia moment changes within the element. Linear interpolation functions were used to calculate the shear deformation and cross-sectional area changes within the element. By using the minimum potential energy principle to vary the total potential energy, the stiffness matrix of the variable cross-section component element incorporating bending deformation, shear deformation, and axial force second-order effects was determined. Finally, the self-developed finite element program was used to perform calculations on the case studies. The research results indicate that this algorithm has good computational accuracy and can analyze the second-order displacement amplification factor and the support effects between variable cross-section portal steel frame columns.

Key words: tapered element; finite element; element stiffness matrix; shear deformation; second order effect

变截面构件能让杆件的刚度与其上部的荷载更好地匹配,相较于等截面构件,其受力更合理且

经济实惠^[1],因此,其在工程中应用广泛。细长的变截面构件以弯曲变形为主,剪切变形可以忽略。当

收稿日期: 2021-06-07

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51668027)

作者简介: 苏晓(1996—),男,昆明理工大学硕士生。

轴力存在时,二阶效应大,短粗变截面构件的剪切变形常大于甚至远大于弯曲变形,在该情况下剪切变形的影响不能忽略^[2-3]。本研究将推导一个能综合考虑变截面的弯曲变形、剪切变形和轴力二阶效应等因素的变截面单元刚度矩阵,无论这些因素是部分出现,还是全部出现,该矩阵都能计算。

实际运用中,常用较多数量的等截面单元来近似计算变截面构件^[4],但无法精准描述近似程度。运用变截面单元,无需增加单元数量,就能得到较高的精度,该法还可检验等截面近似计算的精度。

在本研究中,变截面的高度是线性变化的,采用三次拉格朗日插值函数来反映其惯性矩变化^[5]。杆件的弯曲变形挠度采用三次 Hermite 插值函数来计算,剪切变形挠度采用线性插值函数来计算。通过最小势能原理对总势能进行变分,得到能综合考虑弯曲变形、剪切变形和轴力二阶效应的变截面单元刚度矩阵。

1 基本假设

1) 变截面单元截面惯性矩 $I(x)$ 采用三次拉格朗日插值函数来表示,其局部坐标形式为:

$$I(\xi)^{(e)} = \mathbf{N}_I(\xi)^{(e)} \mathbf{I}_I^{(e)} \quad (1)$$

其中,

$$\mathbf{I}_I^{(e)} = \{I_1^{(e)}, I_2^{(e)}, I_3^{(e)}, I_4^{(e)}\}^T;$$

$$\mathbf{N}_I(\xi)^{(e)} = \begin{cases} N_1(\xi)^{(e)} = -\frac{9}{16}(\xi + \frac{1}{3})(\xi - \frac{1}{3})(\xi - 1) \\ N_2(\xi)^{(e)} = \frac{27}{16}(\xi + 1)(\xi - \frac{1}{3})(\xi - 1) \\ N_3(\xi)^{(e)} = -\frac{27}{16}(\xi + 1)(\xi + \frac{1}{3})(\xi - 1) \\ N_4(\xi)^{(e)} = \frac{9}{16}(\xi + 1)(\xi + \frac{1}{3})(\xi - \frac{1}{3}) \end{cases}$$

2) 截面面积 $A(x)$ 采用线性插值函数来表示,其局部坐标形式为:

$$\mathbf{A}(\xi)^{(e)} = \mathbf{N}_{A_i}(\xi)^{(e)} \mathbf{A}_i^{(e)} \quad (2)$$

其中,

$$\mathbf{A}_i^{(e)} = \{A_1^{(e)}, A_2^{(e)}\}^T;$$

$$\mathbf{N}_{A_i}(\xi)^{(e)} = \begin{cases} N_5(\xi)^{(e)} = (1 - \xi)/2 \\ N_6(\xi)^{(e)} = (1 + \xi)/2 \end{cases}$$

3) 构造位移模式时,不考虑轴力作用^[1]。

2 位移模式的选取

弯曲变形的每个节点有2个自由度,一个杆件有4个自由度,位移模式选择三次插值函数表示。剪切变形每个节点有1个自由度,一个单元有2个自由度,位移模式选择线性插值函数^[6-10]。弯曲变形 w_b 和剪切变形 w_s 可以叠加:

$$w^{(e)} = w_b^{(e)} + w_s^{(e)} \quad (3)$$

变截面单元力学模型如图1所示,单元的节点位移向量可分为弯曲变形和剪切变形两个部分。

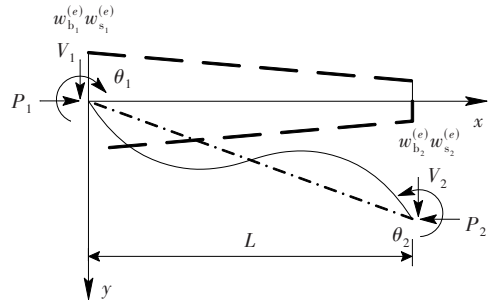


图1 变截面单元力学模型

Fig. 1 Mechanical model of variable section element

$$\begin{cases} \mathbf{a}_b^{(e)} = \{w_{b_1}^{(e)}, \theta_1^{(e)}, w_{b_2}^{(e)}, \theta_2^{(e)}\}^T \\ \mathbf{a}_s^{(e)} = \{w_{s_1}^{(e)}, w_{s_2}^{(e)}\}^T \end{cases} \quad (4)$$

其中,

$$\theta_1^{(e)} = \left(\frac{dw_b}{dx} \right)_1^{(e)};$$

$$\theta_2^{(e)} = \left(\frac{dw_b}{dx} \right)_2^{(e)}.$$

2.1 弯曲挠度位移函数

变截面单元内的弯曲变形 $w_b(x)$ 可以由节点位移向量 $\mathbf{a}_b^{(e)}$ 插值得到,插值形函数 $\mathbf{N}_b(\xi)^{(e)}$ 采用三次 Hermite 插值函数,其局部坐标形式为:

$$w_b(\xi)^{(e)} = \mathbf{N}_b(\xi)^{(e)} \cdot \mathbf{a}_b^{(e)} \quad (5)$$

其中,

$$\mathbf{N}_b(\xi)^{(e)} = \begin{cases} N_7(\xi)^{(e)} = (2 - 3\xi + \xi^3)/4 \\ \bar{N}_7(\xi)^{(e)} = (1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)/4 \\ N_8(\xi)^{(e)} = (2 + 3\xi - \xi^3)/4 \\ \bar{N}_8(\xi)^{(e)} = (-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)/4 \end{cases}$$

该形函数用单元局部坐标表示,按式(5)进行坐标变换,得到整体坐标的表达曲率:

$$\begin{cases} x = \frac{l}{2} (1 + \xi) \\ \left(\frac{d^2 w_b}{dx^2} \right)^{(e)} = \frac{4}{l^2} \cdot \left(\frac{d^2 w_b}{d\xi^2} \right)^{(e)} \\ \left(\frac{d^2 w_b}{dx^2} \right)^{(e)} = \frac{4}{(l^{(e)})^2} \cdot \left\{ \frac{d^2 N_7^{(e)}}{d\xi^2}, \frac{d^2 \bar{N}_7^{(e)}}{d\xi^2} \cdot \frac{l}{2}, \frac{d^2 N_8^{(e)}}{d\xi^2}, \frac{d^2 \bar{N}_8^{(e)}}{d\xi^2} \cdot \frac{l}{2} \right\} \cdot \mathbf{a}_b^{(e)} = \\ \left\{ \frac{6\xi}{(l^{(e)})^2}, \frac{-1+3\xi}{l^{(e)}}, \frac{-6\xi}{(l^{(e)})^2}, \frac{1+3\xi}{l^{(e)}} \right\} \cdot \mathbf{a}_b^{(e)} = \\ \mathbf{B}_b^{(e)T} \cdot \mathbf{a}_b^{(e)} \end{cases} \quad (6)$$

$$\mathbf{B}_b^{(e)T} \cdot \mathbf{a}_b^{(e)} \quad (7)$$

2.2 剪切挠度位移函数

变截面单元中,剪切变形引起的附加横向位移 $w_s(x)$ 可以由节点位移向量 $\mathbf{a}_s^{(e)}$ 插值得到,插值形函数 $N_s(\xi)^{(e)}$ 采用两节点的拉格朗日插值函数,其局部坐标形式为:

$$\mathbf{w}_s(\xi)^{(e)} = N_{s_i}(\xi)^{(e)} \cdot \mathbf{a}_s^{(e)} \quad (8)$$

式(8)中形函数 $N_{s_i}(\xi)^{(e)}$ 与式(2)中 $N_{\Lambda_i}(\xi)^{(e)}$ 相同,该形函数用单元局部坐标表示,按式(9)进行坐标变换,得到结构整体坐标:

$$\begin{cases} x = \frac{l}{2} (1 + \xi) \\ \left(\frac{dw_s}{dx} \right)^{(e)} = \frac{2}{l} \cdot \left(\frac{dw_s}{d\xi} \right)^{(e)} \\ \left(\frac{dw_s}{dx} \right)^{(e)} = \frac{2}{l} \cdot \left\{ \frac{dN_5^{(e)}}{d\xi}, \frac{dN_6^{(e)}}{d\xi} \right\} \cdot \mathbf{a}_s^{(e)} = \\ \left\{ -\frac{1}{l}, \frac{1}{l} \right\} \cdot \mathbf{a}_s^{(e)} = \\ \mathbf{B}_s^{(e)T} \cdot \mathbf{a}_s^{(e)} \end{cases} \quad (9)$$

$$\mathbf{B}_s^{(e)T} \cdot \mathbf{a}_s^{(e)} \quad (10)$$

3 单元刚度矩阵计算

为得到考虑弯曲变形、剪切变形和轴力二阶效应的变截面单元刚度矩阵,采用最小势能原理进行解析。其中,变截面单元弯曲问题的泛函^[1,11]形式为:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^l E \cdot I(x) \cdot \left(\frac{d^2 w_b}{dx^2} \right)^2 dx + \\ & \frac{1}{2} \int_0^l \frac{G}{k} \cdot A(x) \cdot \left(\frac{dw_s}{dx} \right)^2 dx - \\ & P \cdot \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx - \\ & \sum_j V_j \cdot w_j - \sum_k M_k \cdot \theta_k \end{aligned} \quad (11)$$

式中: E 为弹性模量; G 为剪切模量; P 为轴向荷载; M 为弯矩; V 为横向荷载; k 为横截面剪切校正因子,对于矩形截面而言, $k = 6/5$; w 表示总节点挠度; θ 为总节点转角。

$$w = w_b + w_s \quad (12)$$

泛函 Π 可用节点位移向量 $\mathbf{a}_b^{(e)}$ 、 $\mathbf{a}_s^{(e)}$ 以及总节点位移向量 $\mathbf{a}^{(e)}$ 来表达。根据最小势能原理,可由泛函得到极值的必要条件,即 $\delta\Pi = 0$, 相当于对该泛函所有的变量 $(\mathbf{a}_b^{(e)}, \mathbf{a}_s^{(e)}, \mathbf{a}^{(e)})$ 求偏导后的值再求和,并且令其为零^[9]:

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{a}_b^{(e)}} \delta\mathbf{a}_b^{(e)} + \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{a}_s^{(e)}} \delta\mathbf{a}_s^{(e)} + \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{a}^{(e)}} \delta\mathbf{a}^{(e)} = 0 \quad (13)$$

前三项 $\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{a}_b^{(e)}} \delta\mathbf{a}_b^{(e)}$ 、 $\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{a}_s^{(e)}} \delta\mathbf{a}_s^{(e)}$ 、 $\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{a}^{(e)}} \delta\mathbf{a}^{(e)}$ 分别对应弯曲变形、剪切变形以及轴力二阶效应。其中,总节点位移向量 $\mathbf{a}^{(e)}$ 的表达式为:

$$\mathbf{a}^{(e)} = \{w_1^{(e)}, \theta_1^{(e)}, w_2^{(e)}, \theta_2^{(e)}\}^T$$

由于 $\delta\mathbf{a}_b$ 、 $\delta\mathbf{a}_s$ 、 $\delta\mathbf{a}$ 是任意的,当满足 $\delta\Pi = 0$ 时, $\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{a}_b}$ 、 $\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{a}_s}$ 、 $\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{a}}$ 都根据要求相应为零。

首先,式(13)的前两项 $\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{a}_b} = 0$ 、 $\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{a}_s} = 0$, 可用矩阵 $\mathbf{B}_b^{(e)}$ 、 $\mathbf{B}_s^{(e)}$ 和节点位移向量 $\mathbf{a}_b^{(e)}$ 、 $\mathbf{a}_s^{(e)}$ 表达:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_b^{(e)} \cdot \mathbf{a}_b^{(e)} = \mathbf{F}_b^{(e)} \\ \mathbf{K}_s^{(e)} \cdot \mathbf{a}_s^{(e)} = \mathbf{F}_s^{(e)} \end{cases} \quad (14)$$

其中,

$$\begin{cases} \mathbf{K}_b^{(e)} = \int_{-1}^1 \mathbf{B}_b^{(e)T} E \cdot I(\xi) \mathbf{B}_b^{(e)} \cdot \frac{l}{2} d\xi \\ \mathbf{K}_s^{(e)} = \int_{-1}^1 \mathbf{B}_s^{(e)T} \frac{G}{k} \cdot A(\xi) \mathbf{B}_s^{(e)} \cdot \frac{l}{2} d\xi \end{cases}$$

$\mathbf{F}_b^{(e)}$ 和 $\mathbf{F}_s^{(e)}$ 分别为弯曲变形和剪切变形的单元荷载向量:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_b^{(e)} = \{V_{b_1}^{(e)}, M_{b_1}^{(e)}, V_{b_2}^{(e)}, M_{b_2}^{(e)}\}^T \\ \mathbf{F}_s^{(e)} = \{V_{s_1}^{(e)}, V_{s_2}^{(e)}\}^T \end{cases} \quad (15)$$

得到弯曲变形的变截面单元刚度矩阵 $\mathbf{K}_b^{(e)}$ 与剪切变形的变截面单元刚度矩阵 $\mathbf{K}_s^{(e)}$:

$$\mathbf{K}_b^{(e)} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{E[33(I_1 + I_4) + 27(I_2 + I_3)]}{10l^3} & \frac{E[22I_1 + 27I_2 + 11I_4]}{10l^2} & -\frac{E[33(I_1 + I_4) + 27(I_2 + I_3)]}{10l^3} & \frac{E[11I_1 + 27I_3 + 22I_4]}{10l^2} \\ & \frac{E(15I_1 + 24I_2 - 3I_3 + 4I_4)}{10l} & -\frac{E[22I_1 + 27I_2 + 11I_4]}{10l^2} & \frac{E[7(I_1 + I_4) + 3(I_2 + I_3)]}{10l} \\ & & \frac{E[33(I_1 + I_4) + 27(I_2 + I_3)]}{10l^3} & -\frac{E[11I_1 + 27I_3 + 22I_4]}{10l^2} \\ & & & \frac{E(4I_1 - 3I_2 + 24I_3 + 15I_4)}{10l} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{K}_s^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{G(A_1 + A_2)}{2kl} & -\frac{G(A_1 + A_2)}{2kl} \\ -\frac{G(A_1 + A_2)}{2kl} & \frac{G(A_1 + A_2)}{2kl} \end{bmatrix} \quad (17)$$

为便于将 $\mathbf{K}_b^{(e)}$ 与 $\mathbf{K}_s^{(e)}$ 合并为一个单元刚度矩阵,利用平衡条件可使单元每个结点上的 3 个自由度 $w_{b_i}^{(e)}$ 、 $w_{s_i}^{(e)}$ 、 $\theta_i^{(e)}$ 减少为 2 个独立的自由度 $w_i^{(e)}$ 、 $\theta_i^{(e)}$ 。其中, $i = 1, 2$ 。

根据变截面单元剪力的平衡关系^[9,12],有:

$$V_b^{(e)} = V_s^{(e)} \quad (18)$$

根据几何关系,则可得到:

$$(w_2^{(e)} - w_1^{(e)}) = (w_{b_2}^{(e)} - w_{b_1}^{(e)}) + (w_{s_2}^{(e)} - w_{s_1}^{(e)}) \quad (19)$$

联立式(18)~(19),将 $w_{b_i}^{(e)}$ 、 $w_{s_i}^{(e)}$ 转换为 $w_i^{(e)}$ 、 $\theta_i^{(e)}$,表达式为:

$$w_{b_i}^{(e)} - w_{s_i}^{(e)} = \frac{1}{(1 + \phi_1)}(w_2^{(e)} - w_1^{(e)}) + \frac{\phi_2}{(1 + \phi_1)}\theta_1^{(e)} + \frac{\phi_3}{(1 + \phi_1)}\theta_2^{(e)} \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{E[33(I_1 + I_4) + 27(I_2 + I_3)]}{10l^3(1 + \phi_1)} & \frac{E[22I_1 + 27I_2 + 11I_4]}{10l^2(1 + \phi_1)} & -\frac{E[33(I_1 + I_4) + 27(I_2 + I_3)]}{10l^3(1 + \phi_1)} & \frac{E[11I_1 + 27I_3 + 22I_4]}{10l^2(1 + \phi_1)} \\ & k_{22}^I & -\frac{E[22I_1 + 27I_2 + 11I_4]}{10l^2(1 + \phi_1)} & k_{24}^I \\ & & \frac{E[33(I_1 + I_4) + 27(I_2 + I_3)]}{10l^3(1 + \phi_1)} & -\frac{E[11I_1 + 27I_3 + 22I_4]}{10l^2(1 + \phi_1)} \\ & & & k_{44}^I \end{bmatrix} \quad (22)$$

其中,

$$\begin{aligned} k_{22}^I &= \frac{E(15I_1 + 24I_2 - 3I_3 + 4I_4)}{10l} - \frac{E[22I_1 + 27I_2 + 11I_4]\phi_2}{10l^2(1 + \phi_1)}; \\ k_{24}^I &= \frac{E[7(I_1 + I_4) + 3(I_2 + I_3)]}{10l} - \frac{E[22I_1 + 27I_2 + 11I_4]\phi_3}{10l^2(1 + \phi_1)}; \\ k_{44}^I &= \frac{E(4I_1 - 3I_2 + 24I_3 + 15I_4)}{10l} - \frac{E[11I_1 + 27I_3 + 22I_4]\phi_3}{10l^2(1 + \phi_1)}. \end{aligned}$$

$$w_{s_2}^{(e)} - w_{s_1}^{(e)} = \frac{\phi_1}{(1 + \phi_1)}(w_2^{(e)} - w_1^{(e)}) - \frac{\phi_2}{(1 + \phi_1)}\theta_1^{(e)} - \frac{\phi_3}{(1 + \phi_1)}\theta_2^{(e)} \quad (21)$$

其中,

$$\begin{cases} \phi_1 = \frac{kE[33(I_1 + I_4) + 27(I_2 + I_3)]}{10l^2GA} \\ \phi_2 = \frac{kE[22I_1 + 27I_2 + 11I_4]}{10lGA} \\ \phi_3 = \frac{kE[11I_1 + 27I_3 + 22I_4]}{10lGA} \\ A = \frac{A_1 + A_2}{2}. \end{cases}$$

将式(20)和式(21)代入方程(14),并将其合并,得到同时考虑弯曲变形和剪切变形的变截面单元刚度矩阵 $\mathbf{K}_1^{(e)}$:

$$\mathbf{K}_1^{(e)} =$$

为得到考虑轴力二阶效应的几何单元刚度矩阵,由式(20)~(21),将 $\left(\frac{dw_b}{dx}\right)^{(e)}$ 、 $\left(\frac{dw_s}{dx}\right)^{(e)}$ 变换为 $w_i^{(e)}$ 、 $\theta_i^{(e)}$ 的表达式,再根据转角的几何关系,有:

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)^{(e)} = \left(\frac{dw_b}{dx}\right)^{(e)} + \left(\frac{dw_s}{dx}\right)^{(e)} = \{\mathbf{B}_p^{(e)}\}^T \cdot \mathbf{a}^{(e)} \quad (23)$$

其中,

$$\mathbf{B}_p^{(e)T} = \left\{ -\frac{(3 - 3\xi^2) + 2\phi_1}{2l(1 + \phi_1)}, \frac{(1 - 3\xi^2)\phi_2}{2l(1 + \phi_1)} + \frac{-1 - 2\xi + 3\xi^2}{4}, \frac{(3 - 3\xi^2) + 2\phi_1}{2l(1 + \phi_1)}, \frac{(1 - 3\xi^2)\phi_3}{2l(1 + \phi_1)} + \frac{-1 + 2\xi + 3\xi^2}{4} \right\}.$$

令式(13)中第三项 $\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{a}} = 0$, 用矩阵 $\mathbf{B}_p^{(e)}$ 和节点

位移向量 $\mathbf{a}^{(e)}$ 表达, 可得:

$$\mathbf{S}_p^{(e)} \cdot \mathbf{a}^{(e)} = \mathbf{F}_p^{(e)} \quad (24)$$

$$\mathbf{S}_p^{(e)} = -P \int_{-1}^1 \mathbf{B}_p^{(e)} \{ \mathbf{B}_p^{(e)} \}^T \cdot \frac{l}{2} d\xi \quad (25)$$

$$-P \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{5l(1+\phi_1)^2} + \frac{1}{l} & \frac{(1+\phi_1)l - 2\phi_2}{10l(1+\phi_1)^2} & -\frac{1}{5l(1+\phi_1)^2} - \frac{1}{l} & \frac{(1+\phi_1)l - 2\phi_3}{10l(1+\phi_1)^2} \\ \frac{2l}{15} - \frac{-\phi_2^2 + \phi_2 l(1+\phi_1)}{5l(1+\phi_1)^2} & -\frac{(1+\phi_1)l - 2\phi_2}{10l(1+\phi_1)^2} & -\frac{l}{30} - \frac{\phi_2 l - \phi_3(2\phi_2 + l) + \phi_1 l(\phi_2 + \phi_3)}{10l(1+\phi_1)^2} \\ \frac{1}{5l(1+\phi_1)^2} + \frac{1}{l} & -\frac{(1+\phi_1)l - 2\phi_3}{10l(1+\phi_1)^2} & \frac{2l}{15} - \frac{-\phi_3^2 + \phi_3 l(1+\phi_1)}{5l(1+\phi_1)^2} \end{bmatrix} \quad (26)$$

因此。将式(13)中包含的三项合并, 得到平衡方程:

$$\{ \mathbf{K}_I^{(e)} + \mathbf{S}_p^{(e)} \} \mathbf{a}^{(e)} = \mathbf{F}^{(e)} \quad (27)$$

其中, $\mathbf{F}^{(e)}$ 为单元荷载向量:

$$\mathbf{F}^{(e)} = \{ V_1^{(e)}, M_1^{(e)}, V_2^{(e)}, M_2^{(e)} \}^T。$$

得到同时考虑弯曲变形、剪切变形和轴力二阶效应影响的变截面单元刚度矩阵 $\mathbf{K}_{II}^{(e)}$:

$$\mathbf{K}_{II}^{(e)} = \begin{bmatrix} K_{11}^I + S_{11}^p & K_{12}^I + S_{12}^p & K_{13}^I + S_{13}^p & K_{14}^I + S_{14}^p \\ & K_{22}^I + S_{22}^p & K_{23}^I + S_{23}^p & K_{24}^I + S_{24}^p \\ & & K_{33}^I + S_{33}^p & K_{34}^I + S_{34}^p \\ & & & K_{44}^I + S_{44}^p \end{bmatrix} \quad (28)$$

单元刚度矩阵可计算矩形截面、圆截面以及圆环截面等类型的变截面单元, 由推导的变截面单元刚度矩阵, 组装成结构刚度矩阵。当结构荷载增量 $\Delta F = 0$, 可以得到:

$$\{ \mathbf{K}_I - P_{cr} \mathbf{S}_{p_0} \} \Delta \mathbf{a} = \Delta F = 0 \quad (29)$$

其中, P_{cr} 为临界力。

将二阶效应的分析问题转化为广义特征值的求解问题, $(A - \lambda B)x = 0$, 用QR分解法求解特征值 λ , 得到临界力 P_{cr} 。

4 有限元计算结果的对比

本研究推导的单元刚度矩阵, 考虑了剪切变形和二阶效应等多个因素的影响。为了检验其正确性, 使用 Fortran 语言, 自行编制该单元刚度矩阵的程序, 并通过算例进行对比和验证。假设变截面单元为矩形截面, 结果见表1和图2。

$\mathbf{F}_p^{(e)}$ 为轴力二阶效应下的单元荷载向量:

$$\mathbf{F}_p^{(e)} = \{ V_{p1}^{(e)}, M_{p1}^{(e)}, V_{p2}^{(e)}, M_{p2}^{(e)} \}^T$$

得到几何变截面单元刚度矩阵 $\mathbf{S}_p^{(e)}$:

$$\mathbf{S}_p^{(e)} =$$

1) 算例1

本算例的变截面尺寸为: 截面宽度 $b = 20$ cm, 柱底截面高度 $h_1 = 60$ cm, 柱顶截面高度 $h_2 = 20$ cm, 轴向荷载 $P = 11403.2$ kN, 横向荷载 $V = 20.0$ kN。对图2中的三种情况进行计算, 得到:

① 通过计算检验本文变截面单元刚度矩阵的正确性;

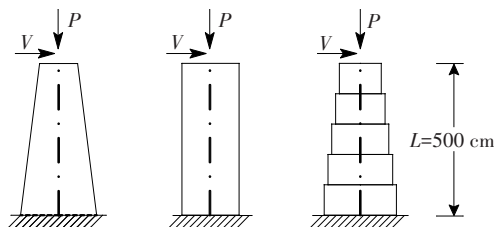
② 变截面与等截面的二阶效应影响以及两者的差别;

③ 多段等截面近似计算的精度。

表1 悬臂柱自由端挠度

Table 1 Free end deflection of cantilever column

计算方法	ANSYS —单元	本文 —单元	近似 —单元	近似 五单元
$w/10^{-2}$ cm	38.20	37.87	76.65	40.80
相对误差/%	—	0.86	-100.65	-6.81



(a) 本文1单元 (b) 近似1单元 (c) 近似5单元

图2 本文变截面单元与近似单元对比示意图

Fig. 2 Schematic diagram of comparison between variable cross-section element and approximate element in this paper

由图2和表1可知: ① 本研究单元的计算结果与ANSYS的较吻合, 相对误差为0.86%, 据此可验证本研究计算结果的正确性; ② 若用平均高度的等截面来近似计算, 相对误差为100.65%, 工程上不可

接受;③若用多段等截面近似计算,则其相对误差为 6.81%。

2) 算例 2

变截面门式刚架如图 3 所示。其中,左、右立柱的截面尺寸为:截面宽度 $b = 20 \text{ cm}$,柱底截面高度 $h_1 = 20 \text{ cm}$,柱顶截面高度 $h_2 = 40 \text{ cm}$;横梁为等截面梁,截面尺寸为: $b = 20 \text{ cm}$, $h = 30 \text{ cm}$, $V = 100 \text{ kN}$ 。计算得到:

① 变截面框架临界力。变系数的临界微分方程的求解较为困难,故采用二阶轴力-位移曲线或求解特征方程的方法得到临界力。

② 验证二阶位移放大系数,分析验证柱顶的一阶侧移与二阶侧移的关系。

③ 柱间相互支援作用。在不同荷载情况下分析刚度的支援作用对变截面门式刚架柱临界力的影响。

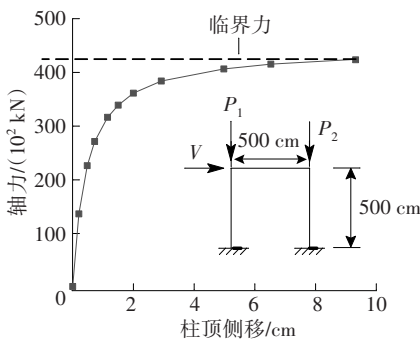


图 3 二阶轴力-位移曲线

Fig. 3 Second order axial force-displacement curve

其中, P_1 、 P_2 分别为左、右立柱的轴力; P_{cr1} 、 P_{cr2} 分别代表左、右立柱的临界力。由图 4 和表 2 可以发现:

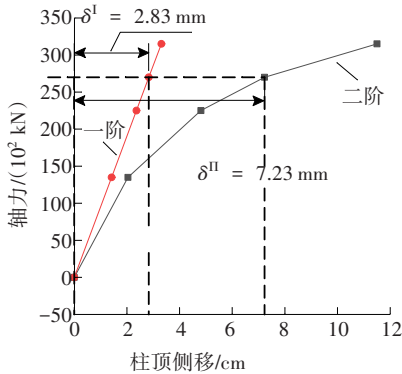


图 4 一阶、二阶轴力-位移曲线对比

Fig. 4 Comparison between first order force-displacement curve and second order axial force-displacement curve

表 2 不同荷载情况下临界力大小

Table 2 Critical force under different loads

荷载情况	$P_1 = 1.0P$ $P_2 = 1.0P$	$P_1 = 0.5P$ $P_2 = 1.5P$
左柱 P_{cr1} /kN	44 100	22 050
右柱 P_{cr2} /kN	44 100	66 150
$(P_{cr1} + P_{cr2})$ /kN	88 200	88 200

1) 当 $P_1 = P_2 = 1.0P$ 时,通过二阶轴力-位移曲线计算,得到立柱的临界力 P_{cr} 为 44 100 kN;

2) 由图 4 中一阶与二阶的轴力-位移曲线可知,当轴力 $P = 27 000 \text{ kN}$ 时,放大系数 η 为:

$$\eta = 1/(1 - P/P_{cr}) = 1/(1 - 27\,000/44\,100) = 2.58$$

柱顶的一阶侧移 δ^I ,二阶侧移 δ^{II} 满足关系式:

$$\delta^{II} = \eta \cdot \delta^I = 2.58 \times 2.83 \text{ mm} = 7.3 \text{ mm}$$

3) 当 $P_1 = P_2 = 1.0P$ 时,变截面门式刚架左、右立柱的临界力相同,左、右立柱的刚度同时消耗完并达到临界力,立柱之间没有刚度的相互支援。当左、右立柱施加的轴力不相同, $P_1 = 0.5P$, $P_2 = 1.5P$ 时,右柱由于承受更大的轴力,刚度会先消耗完,左柱向右柱提供刚度的支援作用最终导致左柱的临界力变小,右柱的临界力变大。柱间荷载的分配不同,使得左、右立柱的刚度发生变化,最终导致左、右立柱临界力的不同,但变截面门式刚架的总临界力 $(P_{cr1} + P_{cr2})$ 保持不变。

5 结论

1) 基于形函数和最小势能原理,本研究推导了考虑剪切变形和轴力二阶效应的变截面单元刚度矩阵。

2) 验证了变截面单元刚度矩阵的正确性和精确性,将计算结果与 ANSYS 的计算结果进行对比,两者吻合性较好。

3) 通过轴力-位移曲线分析,用二阶位移放大系数,近似计算二阶变形 $\delta^{II} = \eta \cdot \delta^I$ 。由此,也能较为方便得到变截面门式刚架柱的临界力。

4) 当变截面门式刚架的左、右立柱的荷载分配不同时,荷载小的柱会向荷载大的柱提供刚度的支

援,其结果会导致荷载小的柱子的临界力变小,反之则增大,但临界力的总和保持不变。

参考文献(Reference)

- [1] 传光红,陈以一,童根树. 变截面 Timoshenko 梁的单元刚度矩阵[J]. 计算力学学报,2014,31(2):265-272.
CHUAN Guanghong, CHEN Yiyi, TONG Genshu. Element stiffness matrix for Timoshenko beam with variable cross-section [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2014, 31(2): 265-272.
- [2] 陆念力,张宏生. 计及二阶效应的一种变截面梁精确单元刚度阵[J]. 工程力学,2008,25(12):60-64,78.
LU Nianli, ZHANG Hongsheng. Exact elemental stiffness matrix of a tapered beam considering second-order effects[J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(12): 60-64, 78.
- [3] 李进军,李国强. 考虑轴力和剪切变形影响的楔形梁自由振动分析[J]. 钢结构,2000,15(1):31-34.
LI Jinjun, LI Guoqiang. Analysis of free vibration for tapered beam including effects of axial force and shear deformation[J]. Steel Construction, 2000, 15(1): 31-34.
- [4] 刘悦,王立平. 基于刚度矩阵的空间变截面梁简化问题[J]. 清华大学学报(自然科学版),2008,48(11):1915-1918.
LIU Yue, WANG Liping. Simplification of a spatial beam with variable cross sections based on the stiffness matrix [J]. Journal of Tsinghua University (Science and Technology), 2008, 48(11): 1915-1918.
- [5] BROWN C J. Approximate stiffness matrix for tapered beams[J]. Journal of Structural Engineering, 1984, 110(12):3050-3055.
- [6] HINTON E, OWEN D R J. An introduction to finite element computations[M]. Swansea (Wales): Pineridge Press, 1979.
- [7] 张军锋,尹会娜,孙大勇,等. 基于形函数推导考虑剪切变形的欧拉梁单元刚度矩阵[J]. 重庆交通大学学报(自然科学版),2020,39(9):59-66.
ZHANG Junfeng, YIN Huina, SUN Dayong, et al. Euler beam element stiffness matrix considering shear deformation based on shape function derivation [J]. Journal of Chongqing Jiaotong University (Natural Science), 2020, 39(9): 59-66.
- [8] 龙驭球,包世华,匡文起. 结构力学-II-专题教程[M]. 3版. 北京:高等教育出版社,2012.
LONG Yuqiu, BAO Shihua, KUANG Wenqi. Structural mechanics-II-special course[M]. 3rd ed. Beijing: Higher Education Press, 2012.
- [9] 刘意,王国华,李年航,等. 桥墩防撞等级评估方法及其应用[J]. 交通科学与工程,2020,36(4):88-93.
LIU Yi, WANG Guohua, LI Nianhang, et al. Assessment method and application of anti-collision grade of bridge pier [J]. Journal of Transport Science and Engineering, 2020, 36(4): 88-93.
- [10] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京:清华大学出版社,2003.
WANG Xucheng. Finite element method [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003.
- [11] 刘海锋,杨靖波,韩军科,等. 考虑主材节点刚域影响的钢管输电塔变截面梁单元有限元模型[J]. 工程力学,2015,32(6):162-170.
LIU Haifeng, YANG Jingbo, HAN Junke, et al. Finite element model of varied-section beam element for tubular transmission tower considering rigid zones of main members[J]. Engineering Mechanics, 2015, 32(6): 162-170.
- [12] 李银山,官云龙,李彤,等. 求解变截面梁变形的快速解析法[J]. 工程力学,2015,32(S1):116-121,141.
LI Yinshan, GUAN Yunlong, LI Tong, et al. A fast analytical method for the deformation of beams with varying cross-sections[J]. Engineering Mechanics, 2015, 32(S1): 116-121, 141.

(责任编辑:罗容;校对:李脉;英文编辑:李岳林)