

DOI: 10.16544/j.cnki.cn43-1494/u.2022032420240471

文章编号: 1674-599X(2024)02-0055-07

引用格式: 陈得良, 李耕. 任意不等跨等截面连续梁自由振动分析[J]. 交通科学与工程, 2024, 40(2): 55-61.

Citation: CHEN Deliang, LI Geng. Free vibration analysis of constant cross section continuous beams with arbitrary unequal spans[J]. J Transp Sci Eng, 2024, 40(2): 55-61.

任意不等跨等截面连续梁自由振动分析

陈得良, 李耕

(长沙理工大学 土木工程学院, 湖南 长沙 410114)

摘要: 以等截面任意不等跨连续梁为对象, 基于 Euler-Bernoulli 梁理论, 利用分段梁模型和分离变量法, 在考虑连续梁边界以及梁段位移连续性条件的基础上, 提出了任意多跨不等跨连续梁固有频率和振动模态分析新方法。利用该方法可高效得到任意不等跨连续梁的固有频率和振动模态, 该方法将为多跨连续梁车-桥耦合等受迫振动响应研究提供新的思路和便利。

关键词: 多跨连续梁; 等截面; Euler-Bernoulli 梁; 自由振动; 迭代法

中图分类号: U441

文献标志码: A

Free vibration analysis of constant cross section continuous beams with arbitrary unequal spans

CHEN Deliang, LI Geng

(School of Civil Engineering, Changsha University of Science & Technology, Changsha 410114, China)

Abstract: Based on Euler-Bernoulli beam theory, segmented beam model, and separation variable method, a new method for analyzing the natural frequencies and vibration modes of any multi span and unequal span continuous beam is proposed on the basis of considering the boundary and displacement continuity conditions of the continuous beam, which can be used to efficiently obtain the natural frequencies and vibration modes of arbitrary unequal span continuous beams. This method will provide new ideas and convenience for the study of forced vibration response such as multi-span continuous beam vehicle-bridge coupling.

Key words: multi-span continuous beam; constant cross section; Euler-Bernoulli beam; free vibration; iterative method

连续梁桥作为一种常见的桥梁结构形式, 在桥梁建设中得到了广泛应用^[1-2]。当前, 对于梁类结构振型函数和自振频率的研究主要有离散法与连续法两种方法^[3-4]。前者将桥梁结构视为一个多自由度的离散系统, 其计算精度取决于结构的离散程度; 后者将桥梁结构视为一个结构参数连续体系, 通过建立无限自由度系统控制方程, 将模态参数的

解简化为超越方程的解。对简支梁结构, 采用连续法可得到解析解^[5], 对于连续梁结构, 则难以得到解析解。

为了获得连续梁的振型函数, 国内外相关研究人员分别采用了不同的求解思路。LEE^[6]采用拟谱法得到了不同边界条件下不同尺寸比和截面数的多跨梁的自由振动特性。宋一凡^[7]研究了公路桥梁

收稿日期: 2022-03-24

基金项目: 湖南省教育厅科学研究项目(20B028)

通信作者: 陈得良(1971—), 男, 教授, 主要从事结构非线性动力学分析方面的研究工作。E-mail: 416501065@qq.com

投稿网址: <https://jtkxygc.csust.edu.cn/jtkxygc/home>

振型函数和固有频率的分析方法,并得到了一至四跨等跨等截面梁的振型函数和自振频率。李吉^[8]将多跨连续梁按单跨梁来处理,通过将支座对梁的作用考虑成未知荷载,推导了多跨连续梁的振动频率和振型函数,该方法简单但易受边界条件的限制。CARUNTU^[9]通过将梁的四阶横向振动微分方程分解成两个二阶微分方程,得到了抛物线型悬臂梁固有频率和振型。LIN等^[10]提出了直接用连续梁运动微分方程求解系统固有频率和相应振型的解析方法。此外,LIN等^[11]继续将这种解析方法推广到了多个弹性梁段和多个刚体组成的混合梁的固有频率和振型分析中。刘寒冰等^[12]基于分段思维,根据边界条件和振型在每跨内的传递关系,得到了桥梁的自振频率和振型。BOIANGIU等^[13]利用贝塞尔函数得到了变截面直梁自由弯曲振动微分方程,并通过数值分析验证了所提出的传递矩阵对多阶梁固有频率计算的有效性。随着计算方法的优化,一些研究人员开始考虑含轴向变化的梁结构的振动影响。SiNiR等^[14]考虑了非均匀截面的影响,应用微分求积法研究了功能梯度欧拉-伯努利悬臂梁的自由和强迫振动特性。FAKHREDDINE等^[15]基于哈

密尔顿原理和谱分析,采用一种近似方法求解了四跨梁的非线性模态和相应的主梁曲线。GAO等^[16]基于区域分解方法,利用瑞利-里兹法得到了多跨梁结构的自由振动特性。

上述文献分析表明,对多跨梁固有频率和振型的精确解已有不少研究,但求解过程仍然相对复杂。本文基于Euler-Bernoulli梁理论,利用分段梁模型,根据边界物理条件,建立了多跨连续梁固有频率和振型的理论公式,并研究了多跨梁的固有频率和振动响应,方法简单且计算效率高。

1 多跨连续梁振动方程及固有频率

图1给出了多跨连续梁结构模型,该连续梁模型的截面抗弯刚度 $EI(x)$ 和跨数 m 为定值。基于Euler-Bernoulli梁理论,第 s 跨均匀梁段自由振动方程可写为:

$$EI(x) \frac{\partial^4 w_s(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w_s(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

式中: E 为梁的弹性模量; $I(x)$ 为梁在 x 处的截面惯性矩; ρ 为材料密度; A 为梁的截面面积; $w_s(x, t)$ 为竖向振动位移量。

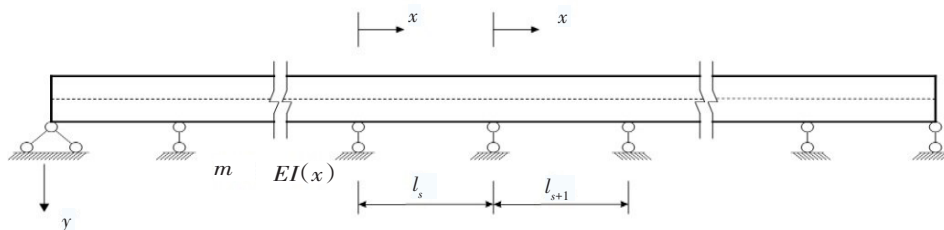


图1 多跨梁结构计算模型

Fig. 1 Calculation model of multi-span beams structure

利用分离变量法,将第 s 跨 $w_s(x, t)$ 写为:

$$w_s(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \cdot Y_{i,s}(x) \quad (2)$$

式中: $q_i(t)$ 为连续梁的第 i 阶模态广义坐标; $Y_{i,s}(x)$ 为第 s 跨的振型函数。

则连续梁整体的 $w(x, t)$ 可写为:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \cdot Y_i(x) \quad (3)$$

式中: $Y_i(x)$ 为连续梁的第 i 阶振型函数,须满足该跨的边界条件及连续性条件,且有:

$$Y_i(x) = \sum_{s=1}^N a_s Y_{i,s}(x) \quad (4)$$

式中: N 为总跨数。

将式(2)代入式(1)可得:

$$\begin{cases} \frac{d^4 Y_{i,s}(x)}{dx^4} - \lambda^4 Y_{i,s}(x) = 0 \\ \frac{d^4 q_i(t)}{dt^4} - \omega^2 q_i(t) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

式中: ω 为梁体振动的自振频率;中间量 λ 为:

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \cdot m}{EI(x)}} \quad (6)$$

式(5)中的第1式可写为:

$$Y_{n,s}(x) = A_{n,s} \sin \lambda_n x + B_{n,s} \cos \lambda_n x + C_{n,s} \sinh \lambda_n x + D_{n,s} \cosh \lambda_n x \quad (7a)$$

$$Y'_{n,s}(x) = \lambda_n (A_{n,s} \cos \lambda_n x - B_{n,s} \sin \lambda_n x + C_{n,s} \cosh \lambda_n x + D_{n,s} \sinh \lambda_n x) \quad (7b)$$

$$Y''_{n,s}(x) = \lambda_n^2 (-A_{n,s} \sin \lambda_n x - B_{n,s} \cos \lambda_n x + C_{n,s} \sinh \lambda_n x + D_{n,s} \cosh \lambda_n x) \quad (7c)$$

式中: $Y'_{n,s}(x)$ 、 $Y''_{n,s}(x)$ 分别为 $Y_{n,s}(x)$ 对 x 的一阶、二阶导数; $A_{n,s}$ 、 $B_{n,s}$ 、 $C_{n,s}$ 、 $D_{n,s}$ 为由边界连续性条件决定的待定常数; n 为模态阶数。

由连续梁左侧边界条件可得到:

$$\begin{cases} Y_{n,1}(0) = 0 \\ Y''_{n,1}(0) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

将式(8)写成矩阵形式为:

$$[H_{1,0}] \{X_1\} = 0 \quad (9)$$

其中,

$$[H_{1,0}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\{X_1\} = (A_{n,1} \quad B_{n,1} \quad C_{n,1} \quad D_{n,1})^T \quad (11)$$

同理,由连续梁右侧边界条件可得到:

$$\begin{cases} Y_{n,m}(l_m) = 0 \\ Y''_{n,m}(l_m) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

式中: l_m 为第 m 跨的跨径长度。

将式(12)写成矩阵形式:

$$[H_{m,l_m}] \{X_m\} = 0 \quad (13)$$

由第 s 跨与第 $s+1$ 跨边界连续性条件可得到:

$$\begin{cases} Y_{n,s}(l_s) = 0 \\ Y_{n,s+1}(0) = 0 \\ Y'_{n,s}(l_s) = Y'_{n,s+1}(0) \\ Y''_{n,s}(l_s) = Y''_{n,s+1}(0) \end{cases} \quad (14)$$

将式(14)写成矩阵形式:

$$[H_{s,l_s} \quad H_{s+1,0}] \begin{Bmatrix} X_s \\ X_{s+1} \end{Bmatrix} = 0 \quad (15)$$

联立式(9)、(13)、(15)可得到:

$$[H] \{X\} = 0 \quad (16)$$

其中,

$$[H] = \begin{bmatrix} H_{1,0} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ H_{1,l_1} & H_{2,0} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & H_{2,l_2} & H_{3,0} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & H_{s,l_s} & H_{s+1,0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & H_{m,l_m} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\{X\} = (X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_s \quad X_{s+1} \quad \cdots \quad X_m)^T \quad (18)$$

要使得上述方程组存在非零解,则有:

$$|H| = 0 \quad (19)$$

对式(19)进行迭代计算,即可获得任意跨连续梁的 n 阶固有频率 ω_n 。

2 五跨不等跨连续梁自由振动分析

本文以三跨等跨连续梁为对象得到的振动频率计算公式和文献[17]中的完全一致,说明本文方法是合理的。

三跨连续梁的前三阶固有频率为:

$$\begin{aligned} \omega_{1,3} &= \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI(x)}{\rho A}} \\ \omega_{2,3} &= \frac{3.55^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI(x)}{\rho A}} \\ \omega_{3,3} &= \frac{4.30^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI(x)}{\rho A}} \end{aligned} \quad (20)$$

式中: l 为结构计算跨径; $\omega_{1,3}$ 、 $\omega_{2,3}$ 、 $\omega_{3,3}$ 为三跨连续梁前三阶固有频率。

不全等跨五跨连续梁模型截面尺寸及各跨长度如图2所示。

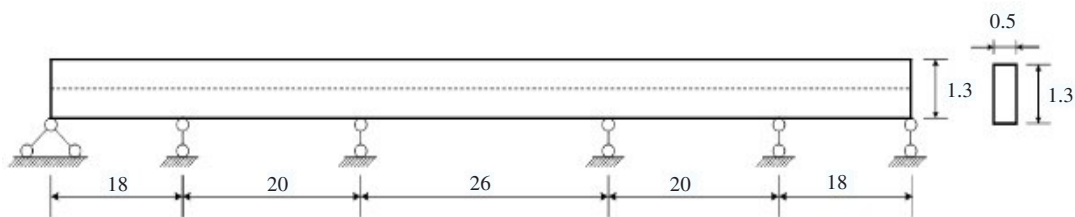


图2 五跨连续梁模型(单位:m)

Fig. 2 The model of five-span continuous beams (unit: m)

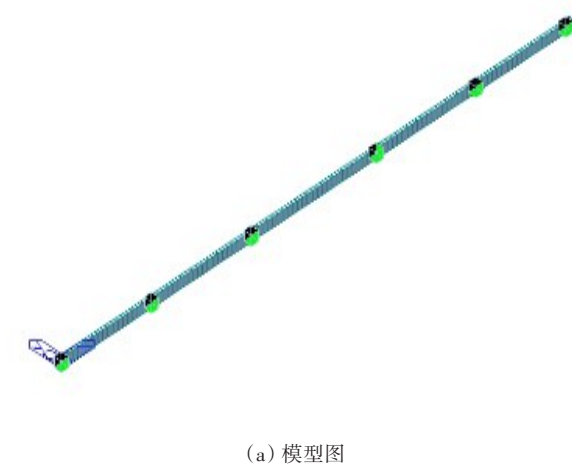
主梁的材料属性及截面特性见表1。建立有限元模型如图3所示。

表1 桥梁截面几何特性参数及材料参数

Table 1 The geometrical characteristics and material parameters of bridge section

A/m^2	I_{xx}/m^4	I_{yy}/m^4	I_{zz}/m^4	E/Pa	$\rho/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$
0.65	0.013 54	0.091 54	0.041 07	3.0×10^{10}	2 400

注:表中 I_{xx} 、 I_{yy} 、 I_{zz} 为截面相对于 x 、 y 、 z 轴的惯性矩。



(a) 模型图



(b) 立面图

图3 五跨连续梁有限元模型

Fig. 3 The finite element model of five-span continuous beams

由式(19)可得中间量 $\lambda_{1,5}$ 、 $\lambda_{2,5}$ 、 $\lambda_{3,5}$:

$$\begin{cases} \lambda_{1,5} = 0.141\ 749 \\ \lambda_{2,5} = 0.174\ 215 \\ \lambda_{3,5} = 0.183\ 261 \end{cases} \quad (21)$$

根据 $\lambda_n = \sqrt[4]{\frac{\omega_n^2 \cdot m}{EI(x)}}$ 得到前三阶固有频率为:

$$\begin{cases} \omega_{1,5} = 4.243\ \text{Hz} \\ \omega_{2,5} = 6.409\ \text{Hz} \\ \omega_{3,5} = 7.092\ \text{Hz} \end{cases} \quad (22)$$

式中: $\omega_{1,5}$ 、 $\omega_{2,5}$ 、 $\omega_{3,5}$ 为五跨连续梁前三阶固有频率。

由表2可看出,本文方法所得结果与有限元模型计算结果吻合良好。将所得固有频率代入式(16),即可得到五跨连续梁的各阶振型,其振型系

数及幅值见表3~6。

图4~6给出了本文方法与有限元模型计算所得振型的对比。从图4~6可以看出,文所方法所得振型与有限元模型计算所得结果基本一致。

表2 连续梁前三阶固有频率

Table 2 The first three inherent frequencies of continuous beam

阶数	本文方法所得固有频率/Hz	有限元模型计算所得固有频率/Hz	误差/%
1	4.243	4.238	0.118
2	6.409	6.396	0.203
3	7.092	7.078	0.198

表3 第1阶振型函数中常数值

Table 3 The constant value in the first mode function

s	$A_{n,s}$	$B_{n,s}$	$C_{n,s}$	$D_{n,s}$
1	0.001 39	0.000 00	-0.000 12	0.000 00
2	0.002 84	0.000 97	0.011 17	-0.011 15
3	0.004 87	0.003 51	-0.343 66	0.343 66
4	0.001 82	0.002 39	-14.489 00	14.489 00
5	0.000 44	0.001 32	115.246 00	-115.246 00

表4 第2阶振型函数中常数值

Table 4 The constant value in the second mode function

s	$A_{n,s}$	$B_{n,s}$	$C_{n,s}$	$D_{n,s}$
1	-0.004 37	0.000 00	0.000 00	0.000 00
2	-0.004 34	0.000 00	0.000 43	-0.000 43
3	-0.001 60	-0.000 96	-1.087 00	1.087 00
4	-0.002 04	-0.003 82	99.709 70	-99.709 70
5	-0.002 06	-0.003 86	56.113 40	-56.113 40

表5 第3阶振型函数中常数值

Table 5 The constant value in the third mode function

s	$A_{n,s}$	$B_{n,s}$	$C_{n,s}$	$D_{n,s}$
1	0.004 63	0.000 00	0.000 10	0.000 00
2	0.003 09	0.000 24	-0.021 10	0.021 10
3	-0.000 23	0.002 93	2.236 30	-2.236 30
4	0.003 09	-0.000 24	267.045 00	-267.045 00
5	0.004 57	-0.000 72	-3 515.475 00	3 515.475 00

表6 连续梁前3阶振型幅值

Table 6 The amplitude of the first three modes of continuous beam (10⁻³ m)

位置	连续梁前3阶振型幅值		
	1阶	2阶	3阶
支座	0.0	0.0	0.0
第1跨跨中	1.1	-4.4	4.7
第2跨跨中	-2.6	4.5	-3.1
第3跨跨中	6.5	0.0	-3.3
第4跨跨中	-2.6	-4.5	-3.1
第5跨跨中	1.1	4.4	4.7

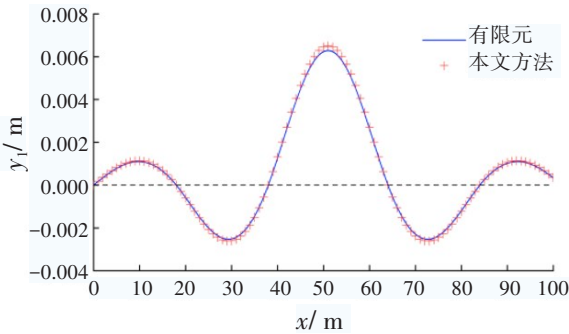


图4 第1阶振型曲线

Fig. 4 Vibration mode curve of the first order

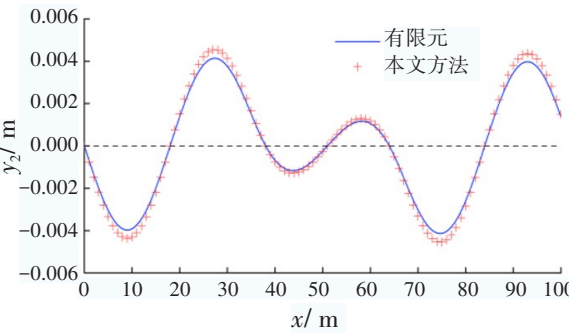


图5 第2阶振型曲线

Fig. 5 Vibration mode curve of the second order

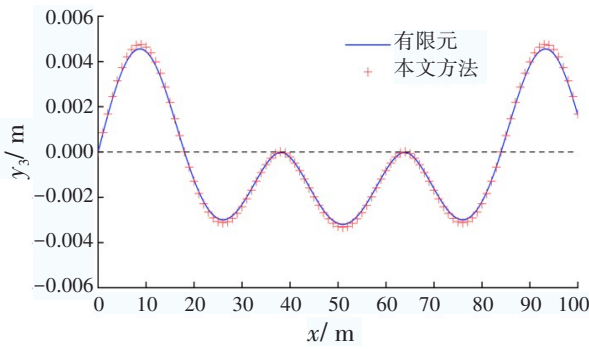


图6 第3阶振型曲线

Fig. 6 Vibration mode curve of the third order

3 六跨不等跨连续梁固有振动分析

为验证本文方法的普适性,现考虑不全等跨的六跨连续梁模型,其截面尺寸及各跨长度如图7所示。桥梁截面参数见表7。

由式(19)可得中间量 $\lambda_{1,6}$ 、 $\lambda_{2,6}$ 、 $\lambda_{3,6}$:

$$\begin{cases} \lambda_{1,6} = 0.132\ 814 \\ \lambda_{2,6} = 0.156\ 733 \\ \lambda_{3,6} = 0.177\ 745 \end{cases} \quad (23)$$

根据 $\lambda_n = \sqrt[4]{\frac{\omega_n^2 \cdot m}{EI(x)}}$ 得到前3阶固有频率为:

$$\begin{cases} \omega_{1,6} = 3.725\ \text{Hz} \\ \omega_{2,6} = 5.187\ \text{Hz} \\ \omega_{3,6} = 6.671\ \text{Hz} \end{cases} \quad (24)$$

式中: $\omega_{1,6}$ 、 $\omega_{2,6}$ 、 $\omega_{3,6}$ 为六跨连续梁前三阶固有频率。

由表7可知,本文方法所得结果与有限元模型计算所得结果吻合良好。将所得固有频率代入式(16),即可得到六跨连续梁的各阶振型。

图8~10给出了本文方法与有限元模型计算所得振型的对比。从图8~10可以看出,本文方法所得结果与有限元模型计算所得结果基本一致,这进一步验证了本文方法的正确性。

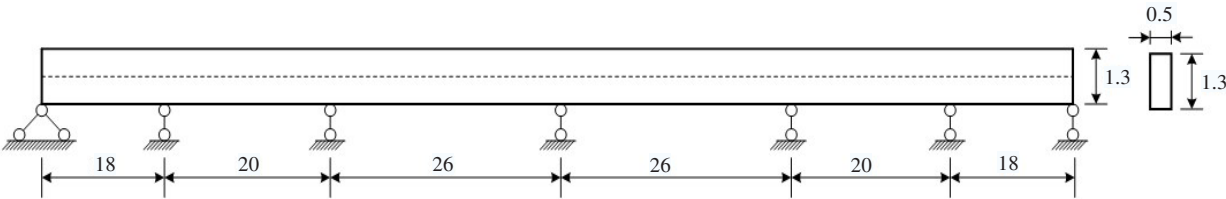


图7 六跨连续梁模型(单位:m)

Fig. 7 The model of six-span continuous beam (unit:m)

表7 连续梁前3阶固有频率

Table 7 The first three inherent frequencies of continuous beam

阶数	本文方法所得固有频率/ Hz	有限元模型计算所得固有频率/ Hz	误差/ %
1	3.725	3.721	0.107
2	5.187	5.180	0.135
3	6.671	6.658	0.195

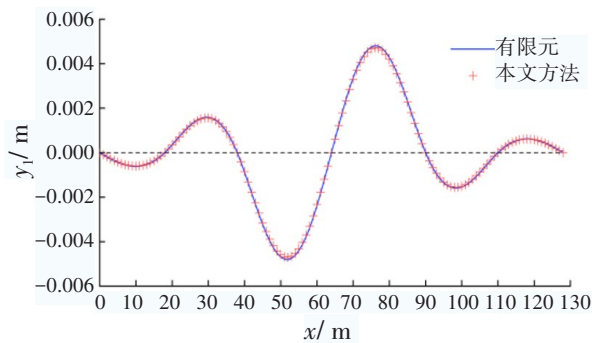


图8 第1阶振型曲线

Fig. 8 The first mode shape

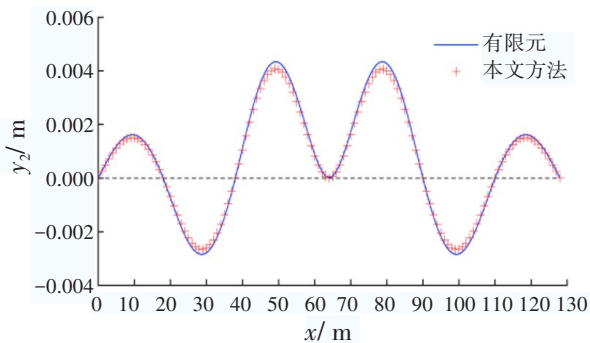


图9 第2阶振型曲线

Fig. 9 The second mode shape

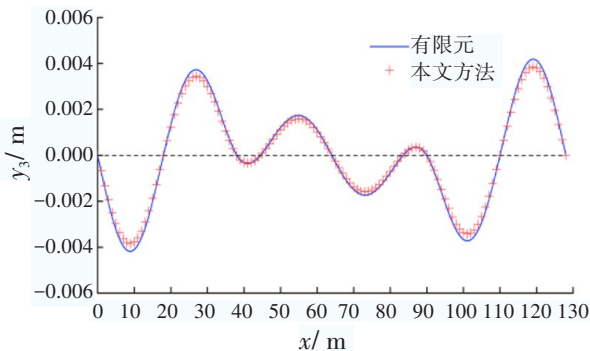


图10 第3阶振型曲线

Fig. 10 The third mode shape

对奇数跨及偶数跨连续梁的数值算例表明,本文方法不仅可以快速分析得到多跨梁结构振动频率,还能准确获得结构的模态振型,且求解方法简便。

4 结论

本文基于 Euler-Bernoulli 梁理论,通过分段的思路,运用半解析法计算多跨等截面连续梁在奇、偶跨情况下的自振频率和振型函数,得到以下结论:

1) 本文方法能对任意多跨连续梁进行固有频率和振型分析,计算思路简单明确,只需根据跨数的不同进行简单的矩阵迭代求解即可,对于任何桥梁截面形式均可。

2) 本文提出了多跨连续梁振型分析公式,并将其应用于多跨连续梁受迫振动(如车-桥耦合振动)下的响应分析,相比以往的方法具有极大优势,有利于实际工程应用和参数化研究。

参考文献(References)

- [1] 《中国公路学报》编辑部. 中国桥梁工程学术研究综述·2021 [J]. 中国公路学报, 2021, 34 (2): 1-97. DOI: 10.3969/j.issn.1001-7372.2021.02.002.
Editorial Department of China Journal of Highway and Transport. Review on china's bridge engineering research: 2021 [J]. China Journal of Highway and Transport, 2021, 34 (2): 1-97. DOI: 10.3969/j.issn.1001-7372.2021.02.002.
- [2] 曹操,李传习,刘永明. 小半径曲线连续梁桥地震反应分析[J]. 交通科学与工程, 2018, 34 (2): 64-70. DOI: 10.16544/j.cnki.cn43-1494/u.2018.02.012.
CAO Cao, LI Chuanxi, LIU Yongming. Seismic response analysis of minor radius curve continuous beam bridge [J]. Journal of Transport Science and Engineering, 2018, 34 (2): 64-70. DOI: 10.16544/j. cnki. cn43-1494/u. 2018.02.012.
- [3] SHEN J, ZHUO J H, WU L, et al. Nonlinear dynamic analysis of multi-vehicle vehicle-bridge coupling system [J]. Journal of Physics: Conference Series, 2021, 1972 (1): 012126. DOI: 10.1088/1742-6596/1972/1/012126.
- [4] 陈得良,全俊. 基于大范围空间转动的车-桥耦合振动分析[J]. 长沙理工大学学报(自然科学版), 2018, 15 (3): 48-53. DOI: 10.3969/j.issn.1672-9331.2018.03.009.

- CHEN Deliang, QUAN Jun. Analysis of coupling vibration of vehicle-bridge system based on large range space rotation [J]. Journal of Changsha University of Science & Technology (Natural Science), 2018, 15(3): 48-53. DOI:10.3969/j.issn.1672-9331.2018.03.009.
- [5] 龙驭球,包世华,袁驷. 结构力学-I-基础教程[M]. 4版. 北京:高等教育出版社,2018.
- LONG Yuqiu, BAO Shihua, YUAN Si. Structural mechanics-I-basic course [M]. 4th ed. Beijing: Higher Education Press, 2018.
- [6] LEE J. Free vibration analysis of circularly curved multi-span Timoshenko beams by the pseudospectral method [J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2007, 21(12): 2066-2072. DOI: 10.1007/BF03177465.
- [7] 宋一凡. 公路桥梁动力学[M]. 北京:人民交通出版社, 2000.
- SONG Yifan. Highway bridge dynamics [M]. Beijing: China Communications Press, 2000.
- [8] 李吉. 求解多跨连续梁固有振动精确解的一种方法 [J]. 力学与实践, 1992, 14(2): 27-29.
- LI Ji. A method for solving the exact solution of natural vibration of multi-span continuous beams [J]. Mechanics and Engineering, 1992, 14(2): 27-29.
- [9] CARUNTU D I. Dynamic modal characteristics of transverse vibrations of cantilevers of parabolic thickness [J]. Mechanics Research Communications, 2009, 36(3): 391-404. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2008.07.005.
- [10] LIN H Y, TSAI Y C. Free vibration analysis of a uniform multi-span beam carrying multiple spring-mass systems [J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 302(3): 442-456. DOI: 10.1016/j.jsv.2006.06.080.
- [11] LIN H Y, WANG C Y. Free vibration analysis of a hybrid beam composed of multiple elastic beam segments and elastic-supported rigid bodies [J]. Journal of Marine Science and Technology, 2012, 20(5): 525-533. DOI: 10.6119/JMST-011-0506-2.
- [12] 刘寒冰,时成林,谭国金,等. 基于分段思想的变截面连续梁桥动力特性计算[J]. 吉林大学学报(工学版), 2015, 45(6): 1779-1783. DOI: 10.13229/j.cnki.jdxbgxb2015 06007.
- LIU Hanbing, SHI Chenglin, TAN Guojin, et al. Calculation method of the dynamic characteristics of continuous beam bridge with variable cross-section based on staging concept [J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2015, 45(6): 1779-1783. DOI: 10.13229/j.cnki.jdxbgxb201506007.
- [13] BOIANGIU M, CEAUSU V, UNTAROIU C D. A transfer matrix method for free vibration analysis of Euler-Bernoulli beams with variable cross section [J]. Journal of Vibration and Control, 2016, 22(11): 2591-2602. DOI: 10.1177/1077546314550699.
- [14] SİNİR S, ÇEVİK M, SİNİR B G. Nonlinear free and forced vibration analyses of axially functionally graded Euler-Bernoulli beams with non-uniform cross-section [J]. Composites Part B: Engineering, 2018, 148: 123-131. DOI: 10.1016/j.compositesb.2018.04.061.
- [15] FAKHREDDINE H, ADRI A, RIFAI S, et al. Geometrically nonlinear free and forced vibrations of Euler-Bernoulli multi-span beams [J]. MATEC Web of Conferences, 2018, 211: 02001. DOI: 10.1051/mateconf/201821102001.
- [16] GAO C, PANG F Z, LI H C, et al. Free and forced vibration characteristics analysis of a multispan Timoshenko beam based on the ritz method [J]. Shock and Vibration, 2021, 2021: 4440250. DOI: 10.1155/2021/4440250.
- [17] 袁向荣. 基于连续梁振动分析的桥梁冲击系数研究 [J]. 四川建筑科学研究, 2013, 39(4): 190-194. DOI: 10.3969/j.issn.1008-1933.2013.04.044.
- YUAN Xiangrong. Study of the impact factor based on the dynamic analysis of the continuous beam [J]. Sichuan Building Science, 2013, 39(4): 190-194. DOI: 10.3969/j.issn.1008-1933.2013.04.044.

(责任编辑:石月珍;英文编辑:杜雪明)