

文章编号: 1674-599X(2020)04-0094-07

## 考虑剪力滞效应和附加轴力的箱梁自振分析

李梦瑶

(昆明理工大学 建筑工程学院, 云南 昆明 650500)

**摘要:** 为了研究箱梁在纵向静力平衡和剪力滞效应共同影响下的自由振动特性, 根据能量变分原理, 推导出简支梁自由振动微分方程和边界条件。利用 Matlab 软件编程进行求解, 并将其求解值与初等梁理论、ANSYS 有限元方法、考虑剪力滞效应的计算结果进行对比分析。研究表明: 推导公式与有限元方法等的计算结果一致, 精度可靠, 但纵向附加轴力会使得简支箱梁相对刚度减小, 导致结构的自振频率降低, 剪力滞效应对自振频率的影响随着振型阶数的升高和跨宽比的减小逐渐增加。

**关键词:** 能量变分原理; 附加轴力; 剪力滞效应; 自振; 有限元分析

中图分类号: U448.21<sup>+</sup>3

文献标志码: A

DOI:10.16544/j.cnki.cn43-1494/u.2020.04.014

### The natural vibration analysis of box girder considering shear lag effect and additional axial force

LI Meng-yao

(Construction Engineering College, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China)

**Abstract:** In order to study the free vibration characteristics of box girder under the joint influence of longitudinal static equilibrium and shear lag effect, the free vibration differential equation and boundary conditions of simply supported beam are derived according to the energy variation principle. The Matlab software is used to solve the problem and compare with the Elementary beam theory, the ANSYS finite element method and the results obtained considering the shear lag effect. The results show that the calculation results are consistent with the finite element calculation results and the accuracy is reliable. It is also found that the longitudinal additional axial force will reduce the relative stiffness of the simply supported box girder, which will lead to the decrease of the self-vibration frequency. With the increase of mode order and the decrease of span-width ratio, the effect of shear hysteresis on the frequency of self-vibration increases gradually.

**Key words:** principle of energy variation; additional axial force; effect of shear lag; natural vibration; finite element analysis

箱梁因自重轻、施工方便等优点被广泛应用于桥梁建设中。因为箱梁截面非实心, 所以箱梁截面的应力分布较复杂, 剪力滞效应尤为突出。当箱梁承受竖向荷载产生竖向挠曲变形时, 上、下翼缘板产生剪切变形, 而腹板在上、下翼缘板之间传递剪力流过程中, 由于应力集中, 导致翼缘板纵向位移, 沿桥宽方向产生不均匀的变化, 这种现象叫剪力滞

效应。所有箱梁结构的动力分析都要求对其剪力滞效应进行分析, 因此, 许多学者对此进行了大量的研究。吴有俊等<sup>[1-2]</sup>人基于实际变形下中性轴和形心轴的重合, 根据能量变分原理进行推导, 得到了考虑剪力滞效应的简支梁强迫振动微分方程及其边界条件。蔺鹏臻等<sup>[3-5]</sup>人根据简支梁的纵向静力平衡条件进行推导, 得出了附加轴力的表达式, 并

收稿日期: 2020-03-13

作者简介: 李梦瑶(1995-), 女, 昆明理工大学硕士生。

研究了其对剪力滞效应的影响。潘旦光<sup>[6]</sup>等人采用模态摄动法求解出简支薄壁箱梁自由振动解析解，根据简支梁振动模态提出了模态剪力滞系数的概念，并建立了剪力滞效应与自振频率之间的关系。蔡恒<sup>[7]</sup>等人根据能量变分原理推导出曲线梁桥的自由振动微分方程，并假设位移场函数为正弦函数，对微分方程近似求解。刘建新<sup>[8]</sup>等人利用能量变分法推导出简支梁强迫振动方程，建立了微分方程解的差分格式，讨论了差分格式的准确性。甘亚南<sup>[9-11]</sup>等人根据能量变分法推导出简支曲线梁和连续梁的弯曲振动方程和边界条件，利用 Matlab 软件编程求解得到了固有频率。目前，针对桥梁静荷载作用下的剪力滞效应已经获得许多研究成果<sup>[12-14]</sup>，而且多数桥梁的动力响应中多数考虑了地震作用<sup>[15]</sup>，但是同时考虑动剪力滞效应和纵向静力平衡的研究鲜见。因此，作者基于能量变分原理，拟在纵向位移函数中增加全截面均匀纵向位移，推导出同时考虑剪力滞效应和纵向静力平衡的简支箱梁自由振动微分方程，并根据假设模态法对微分方程分离参数，利用 Matlab 编程求解自振频率，并与初等梁理论、ANSYS 有限元建模和考虑剪力滞效应的计算结果进行对比分析。

## 1 模型建立

### 1.1 基本假定

为了便于分析，忽略部分影响较小的因素，并做出假设：①考虑剪力滞效应时，截面中性轴仍然通过截面形心；②不计阻尼的影响，所有材料均处于线弹性状态；③翼板纵向位移沿宽度方向按 3 次抛物线分布<sup>[16]</sup>；④箱梁截面处于对称弯曲状态。

分析的箱梁截面尺寸如图 1 所示。在图 1 中， $b_1, b_2, b_3, b_4$  分别为顶板宽度、悬臂板宽度、底板宽度、腹板高度； $h_1, h_2, h_3, h_4$  分别为顶板厚度、悬臂板厚度、底板厚度、腹板厚度；坐标轴采用直角坐标轴， $x$  轴为纵向， $y$  轴为横向， $z$  轴为竖向。

### 1.2 振动微分方程及边界条件

当  $i=1$  时，表示顶板；当  $i=2$  时，表示悬臂板；当  $i=3$  时，表示底板；当  $i=4$  时，表示腹板。箱梁的纵向位移函数为：

$$U_i(x, y, z, t) = Z_i w' + f_i(y, z) u(x). \quad (1)$$

式中： $U_i(x, y, z, t)$  为箱梁的纵向位移函数； $Z_i$  为各

个板到形心的距离； $w$  为竖向挠度； $w' = \frac{\partial w}{\partial x}$ ； $u(x)$  为剪力滞效应引起的附加纵向位移； $f_i(y, z)$  为  $u(x)$  的分布函数。

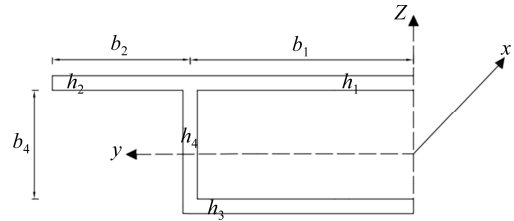


图 1 截面尺寸

Fig. 1 Section size chart

考虑到简支梁截面纵向静力平衡，由于中性轴与形心轴偏离产生轴力，因此，用附加轴力来进行平衡，将附加轴力引起的纵向位移均匀分布在全截面上。附加轴力的作用下，箱梁的纵向位移函数为：

$$U_i(x, y, z, t) = Z_i w' + f_i(y, z) u(x) + \xi. \quad (2)$$

其中，

$$f_i(y, z) = \begin{cases} Z_1 \left[ 1 - \left( \frac{|y|}{b_1} \right)^3 \right], & i=1; \\ Z_2 \left[ 1 - \left( \frac{b_1 + b_2 - |y|}{b_2} \right)^3 \right], & i=2; \\ Z_3 \left[ 1 - \left( \frac{|y|}{b_3} \right)^3 \right], & i=3; \\ 0, & i=4. \end{cases}$$

式中： $\xi$  为由轴力引起的纵向位移； $y$  为箱梁截面待求点的  $y$  坐标。

正应变：

$$\varepsilon_i = \frac{\partial U_i}{\partial x} = \begin{cases} Z_1 w'' + f_1(y, z) u'(x) + \xi', & i=1; \\ Z_2 w'' + f_2(y, z) u'(x) + \xi', & i=2; \\ Z_3 w'' + f_3(y, z) u'(x) + \xi', & i=3; \\ Z_4 w'' + \xi', & i=4. \end{cases} \quad (3)$$

式中： $w'' = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ； $u'(x) = \frac{\partial u}{\partial x}$ ； $\xi' = \frac{\partial \xi}{\partial x}$ 。

切应变：

$$\gamma_i = \frac{\partial U_i}{\partial y} = \begin{cases} f_1'(y, z) u(x), & i=1; \\ f_2'(y, z) u(x), & i=2; \\ f_3'(y, z) u(x), & i=3; \\ 0, & i=4. \end{cases} \quad (4)$$

式中:  $f_1'(y, z) = \frac{\partial f_1(y, z)}{\partial y}$ ;  $f_2'(y, z) = \frac{\partial f_2(y, z)}{\partial y}$ ;

$f_3'(y, z) = \frac{\partial f_3(y, z)}{\partial y}$ 。

根据材料力学中轴力的定义, 可得:

$$\begin{aligned} N &= \sum_{i=1}^4 \int_A E \varepsilon_i dA = 0 \\ &= \sum_{i=1}^4 \left( \int_A E Z_i w'' dA + \int_A E f_i(y, z) u'(x) dA \right) \end{aligned} \quad (5)$$

式中:  $E$  为弹性模量;  $A$  为箱梁截面的面积。

由于截面中性轴通过截面形心, 则截面对形心轴的静矩为 0, 可得  $\int_A E Z_i w'' dA = 0$ 。明显

$\int_A E f(y, z) u'(x) dA \neq 0$ 。因此, 附加轴力为:

$$N_{\text{附}} = \int_A E \xi' dA = - \int_A E f(y, z) u'(x) dA \quad (6)$$

则:

$$\begin{aligned} \int_A \xi' dA &= - \int_A f(y, z) u'(x) dA \\ &= - \int_A \left\{ Z_1 \left[ 1 - \left( \frac{y}{b_1} \right)^3 \right] u'(x) + \right. \\ &\quad \left. Z_2 \left[ 1 - \left( \frac{b_1 + b_2 - y}{b_2} \right)^3 \right] u'(x) - \right. \\ &\quad \left. Z_3 \left[ 1 - \left( \frac{y}{b_3} \right)^3 \right] \right\} u'(x) dA \end{aligned} \quad (7)$$

其中, 式(7)对  $y$  积分, 可得:

$$\int_A \xi' dA = \xi' A = \frac{3}{4} (Z_3 A_3 - Z_1 A_1 - Z_2 A_2) u'(x) \quad (8)$$

式中:  $A_1$  为顶板的横截面积;  $A_2$  为悬臂板的横截面积;  $A_3$  为底板的横截面积。

由于静矩  $S_i = \int Z_i dA$ , 则:

$$\xi' = - \frac{3}{4} u'(x) \frac{S_1 + S_2 + S_3}{A} \quad (9)$$

令  $\alpha = - \frac{3}{4A} (S_1 + S_2 + S_3)$ , 得:

$$\xi = \alpha u(x) \quad (10)$$

顶板应变为:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2} \iiint (E \varepsilon_1^2 + G \gamma_1^2) dV \\ &= \frac{1}{2} E \int [I_1 (w'')^2 + \frac{9}{14} I_1 u'(x)^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\alpha^2 u'(x)^2 A_1 + \frac{3}{2} I_1 w'' u'(x) + \\ &2 S_1 w'' \alpha u'(x) + \frac{3}{2} S_1 \alpha u'(x)^2 + \\ &\frac{9}{5 b_1^2} I_1 \frac{G}{E} u(x)^2] dx \end{aligned} \quad (11)$$

式中:  $I_i = \int Z_i^2 dA$ 。

同理可得, 悬臂板应变能为:

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{2} E \int [I_2 (w'')^2 + \frac{9}{14} I_2 u'(x)^2 + \\ &\alpha^2 u'(x)^2 A_2 + \frac{3}{2} I_2 w'' u'(x) + \\ &2 S_2 w'' \alpha u'(x) + \frac{3}{2} S_2 \alpha u'(x)^2 + \\ &\frac{9}{5 b_1^2} I_2 \frac{G}{E} u(x)^2] dx \end{aligned} \quad (12)$$

底板应变能为:

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{1}{2} E \int [I_3 (w'')^2 + \frac{9}{14} I_3 u'(x)^2 + \\ &\alpha^2 u'(x)^2 A_3 + \frac{3}{2} I_3 w'' u'(x) - \\ &2 S_3 w'' \alpha u'(x) - \frac{3}{2} S_3 \alpha u'(x)^2 + \\ &\frac{9}{5 b_1^2} I_3 \frac{G}{E} u(x)^2] dx \end{aligned} \quad (13)$$

腹板应变能:

$$\begin{aligned} V_4 &= \frac{E}{2} \int [I_4 (w'')^2 + \alpha^2 u'(x)^2 A_4 - \\ &2 w'' \alpha u'(x) S_4] dx \end{aligned} \quad (14)$$

箱梁的动能(仅考虑竖向振动):

$$T = \frac{1}{2} \int m(x, t) \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (15)$$

式中:  $m(x, t)$  为单位长度的质量。

外荷载所做的功为:

$$W = \int P w dx \quad (16)$$

式中:  $P$  为外荷载。

箱梁应变能:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 \quad (17)$$

根据哈密顿原理, 可知:

$$\delta \int (T - V) dt + \delta \int W dt = 0 \quad (18)$$

式中:  $\delta$  为变分符号。

整理可得振动微分方程为:

$$m\ddot{w} + EIw^{(4)} + \frac{3}{4}E(I_1 + I_2 + I_3)u'''(x) + E(S_1 + S_2 - S_3 - S_4)\alpha u'''(x) - P = 0. \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \frac{9}{14}E(I_1 + I_2 + I_3)u''(x) + E\alpha^2 Au''(x) + \\ & \frac{3}{4}E(I_1 + I_2 + I_3)w''' + E\alpha(S_1 + S_2 - S_3 - S_4) \\ & w''' + \frac{3}{2}E(S_1 + S_2 - S_3)\alpha u''(x) - \\ & \frac{9}{5}G\left(\frac{I_1}{b_1^2} + \frac{I_2}{b_2^2} + \frac{I_3}{b_3^2}\right)u(x) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

式中：  $\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t}$ ；  $\ddot{w} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ ；  $w''' = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$ ；  $w^{(4)} = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$ ；

$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ ；  $u''(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ；  $u'''(x) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ 。

边界条件为：

$$\begin{cases} \left[ \begin{array}{l} EIw'' + \frac{3}{4}E(I_1 + I_2 + I_3)u'(x) + \\ E(S_1 + S_2 - S_3 - S_4)\alpha u'(x) \end{array} \right] \delta w' \Big|_{x_1}^{x_2} = 0; \\ \left[ \begin{array}{l} EIw''' + \frac{3}{4}E(I_1 + I_2 + I_3)u''(x) + \\ E(S_1 + S_2 - S_3 - S_4)\alpha u''(x) - m\dot{w} \end{array} \right] \delta w \Big|_{x_1}^{x_2} = 0; \\ \left[ \begin{array}{l} \frac{9}{14}E(I_1 + I_2 + I_3)u'(x) + \\ E\alpha^2 Au'(x) + \frac{3}{4}E(I_1 + I_2 + \\ I_3)w'' + E(S_1 + S_2 - S_3 - \\ S_4)w''\alpha + \frac{3}{2}E(S_1 + S_2 - \\ S_3)\alpha u'(x) \end{array} \right] \delta u(x) \Big|_{x_1}^{x_2} = 0. \end{cases} \quad (21)$$

### 1.3 振动方程求解

由方程(19)可得：

$$u'''(x) = \frac{P - m\dot{w} - EIw^{(4)}}{\frac{3}{4}E(I_1 + I_2 + I_3) + E(S_1 + S_2 - S_3 - S_4)\alpha}. \quad (22)$$

$$u^{(5)}(x) = \frac{P'' - m\dot{w}'' - EIw^{(6)}}{\frac{3}{4}E(I_1 + I_2 + I_3) + E(S_1 + S_2 - S_3 - S_4)\alpha}. \quad (23)$$

式中：  $P'' = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$ ；  $\dot{w}'' = \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2}$ 。

将(22)，(23)代入(20)，

因研究箱梁的自振分析，则  $P=0$ 。

令：

$$I_{s1} = I_1 + I_2 + I_3, I_{s2} = \frac{I_1}{b_1^2} + \frac{I_2}{b_2^2} + \frac{I_3}{b_3^2},$$

$S_a = S_1 + S_2 - S_3, S_b = S_1 + S_2 - S_3 - S_4$ ，可得：

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{9}{14}EI_{s1} + E\alpha^2 A + \frac{3}{2}E\alpha S_a \right] \\ & \frac{-m\dot{w}'' - EIw^{(6)}}{\frac{3}{4}EI_{s1} + E\alpha S_b} + \frac{3}{4}EI_{s1}w^{(6)} + \\ & E\alpha S_b w^{(6)} - \frac{9}{5}GI_{s2} \frac{-m\dot{w} - EIw^{(4)}}{\frac{3}{4}EI_{s1} + E\alpha S_b} = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

式中： $\omega_0$ 为振幅； $N$ 为振型阶数； $l$ 为跨长； $\omega_N$ 为固有角频率； $t$ 为时间； $\theta$ 为初相角。

设  $w = \omega_0 \sin\left(\frac{N\pi}{l}x\right) \sin(\omega_N t + \theta)$  代入控制方程

(27)可得：

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{9}{14}EI_{s1} + E\alpha^2 A + \frac{3}{2}E\alpha S_a \right] \times \\ & \frac{-[m\omega_0 \omega_N^2 \left(\frac{N\pi}{l}\right)^2 - EI\omega_0 \left(\frac{N\pi}{l}\right)^6]}{\frac{3}{4}EI_{s1} + E\alpha S_b} \times \\ & \sin\left(\frac{N\pi}{l}x\right) \sin(\omega_N t + \theta_N) + \frac{3}{4}EI_{s1} \times \\ & \left[ -\omega_0 \left(\frac{N\pi}{l}\right)^6 \sin\left(\frac{N\pi}{l}x\right) \sin(\omega_N t + \theta_N) \right] + \\ & E\alpha S_b \left[ -\omega_0 \left(\frac{N\pi}{l}\right)^6 \sin\left(\frac{N\pi}{l}x\right) \sin(\omega_N t + \theta_N) \right] - \\ & \frac{9}{5}GI_{s2} \frac{-[-m\omega_0 \omega_N^2 + EI\omega_0 \left(\frac{N\pi}{l}\right)^4]}{\frac{3}{4}EI_{s1} + E\alpha S_b} \times \\ & \sin\left(\frac{N\pi}{l}x\right) \sin(\omega_N t + \theta_N) = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

要使式(25)恒等于 0，只需令

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{9}{14}EI_{s1} + E\alpha^2 A + \frac{3}{2}E\alpha S_a \right] \times \\ & \frac{-[m\omega_N^2 \left(\frac{N\pi}{l}\right)^2 - EI\left(\frac{N\pi}{l}\right)^6]}{\frac{3}{4}EI_{s1} + E\alpha S_b} - \end{aligned}$$

$$\left( \frac{3}{4}EI_{s1} + E\alpha S_b \right) \left( \frac{N\pi}{l} \right)^6 +$$

$$\frac{9}{5}GI_{s2} \frac{-\left[m\omega_N^2 - EI\left(\frac{N\pi}{l}\right)^4\right]}{\frac{3}{4}EI_{s1} + E\alpha S_b} = 0 \quad (26)$$

令:  $K_1 = \frac{3}{4}EI_{s1} + E\alpha S_b$ ,  $K_2 = \frac{9}{14}EI_{s1} + E\alpha^2 A + \frac{3}{2}E\alpha S_a$ 。即可得到:

$$\omega_N^2 = \frac{\frac{9}{5}GI_{s2} \frac{EI}{K_1} + \left(\frac{K_2}{K_1}EI - K_1\right)\left(\frac{N\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{N\pi}{l}\right)^4 EI}{\left[K_2\left(\frac{N\pi}{l}\right)^2 + \frac{9}{5}GI_{s2}\right] \frac{EI}{K_1} m} \quad (27)$$

## 2 算例及结果

某混凝土简支箱形截面梁如图1所示,其尺寸参数及材料参数为:泊松比为0.3,弹性模量

$E=3.5 \times 10^{10}$  Pa,  $b_1=3$  m,  $b_2=3$  m,  $b_3=3$  m,  $b_4=3$  m,  $h_1=0.3$  m,  $h_2=0.3$  m,  $h_3=0.3$  m,  $h_4=0.3$  m, 密度为  $2500$  kg/m<sup>3</sup>。采用 ANSYS 有限元软件和 Matlab 程序,对不同跨宽比的简支箱梁自振频率进行计算,并与初等梁理论和考虑剪力滞效应变分法的计算结果进行比较,见表1。

由表1可知,考虑剪滞和轴力的计算结果,与初等梁理论和考虑剪力滞效应的相比,更接近有限元的。跨宽比为3.33时,振型阶数从一阶到四阶,采用推算方法,计算出自振频率分别为20.170, 72.106, 145.115, 236.248 Hz,均小于初等梁理论和考虑剪力滞效应的结果。表明:考虑剪力滞效应和附加轴力修正的解析解,能够与 ANSYS 有限元解吻合。ANSYS 有限元建模过程中,采用 BEAM188 单元和自底向上的建模方式,约束条件为简支约束,进行模态分析。

根据不同跨宽比的箱梁结果见表2。由表2可知,附加轴力对自振频率计算精度的影响,跨宽比

表1 各计算方法的自振频率(单位: Hz)

Table 1 Frequency comparison of natural vibration (unit: Hz)

梁长/m	跨宽比	有限元				初等梁理论			
		I	II	III	IV	I	II	III	IV
10	1.67	69.482	206.100	425.380	709.440	83.272	333.088	749.449	1332.35
15	2.50	33.789	111.810	206.100	305.230	37.010	148.039	333.088	592.157
20	3.33	19.726	69.482	134.510	206.100	20.818	83.272	187.362	333.088
25	4.17	12.860	47.027	84.267	148.480	13.323	53.294	119.912	213.177
30	5.00	9.025	33.789	69.482	111.810	9.252	37.010	83.272	148.039
梁长/m	跨宽比	考虑剪滞和轴力				考虑剪滞			
		I	II	III	IV	I	II	III	IV
10	1.67	72.106	236.248	475.825	798.013	76.145	258.455	507.701	822.362
15	2.50	34.643	118.741	236.248	387.094	35.446	128.254	258.455	417.605
20	3.33	20.170	72.106	145.115	236.248	20.303	76.145	157.833	258.455
25	4.17	13.138	48.391	99.087	161.894	13.108	50.173	106.209	176.583
30	5.00	9.216	34.643	72.106	118.741	9.148	35.446	76.145	128.254

注: I~IV为一至四阶频率;跨宽比=l/2b。

的增大,附加轴力对自振频率的影响略微变大,但稳定在10%左右。当假设简支梁变形时,中性轴与形心轴位置一致,而实际变形过程中,轴力会对结构的振动产生影响<sup>[7]</sup>,中性轴与形心轴的位置会产生一定偏移,从而产生了附加轴力。附加轴力会使简支箱梁的相对刚度减小,从而导致结构的自振频

率降低,进而使得简支箱梁的自振频率降低。附加轴力对自振频率计算精度的影响已经超过了工程精度的容许值,故求解箱梁自振频率过程中,对附加轴力的考虑是必要的。

通过对不同振型阶数考虑剪力滞效应、初等梁理论、推算方法与有限元建模所得的自振频率进行

比值分析。令有限元结果为 1，各计算结果如图 2 所示。从图 2 可以看出，当振型阶数一定时，这 3 种方法随着跨宽比的增加，与有限元模拟结果逐渐接近。当跨宽比为 1.67 时，本计算方法与其他两种方法相比，最为接近有限元的结果。当跨宽比为 5 时，3 种方法与有限元结果均相近。当振型阶数从一阶到四阶时，3 种方法与有限元的计算结果的比值均大，但推算计算方法所得结果相比于其他 2 种方法与有限元结果最为接近。由于简支箱梁的剪力

表 2 附加轴力的影响

**Table 2** Effect of the additional axial force

跨宽比	考虑剪滞和轴力	考虑剪滞	有限元法	附加轴力的影响/%
1.66	1 206.825	1 310.283	1 136.900	9.1
2.50	573.773	625.345	552.430	9.3
3.33	346.111	375.397	308.850	9.4
4.17	236.247	258.586	226.810	9.8
5.00	172.478	189.579	157.901	10.8

注：附加轴力的影响=(考虑剪滞的结果-考虑剪滞和轴力所求结果)/有限元法所求结果。

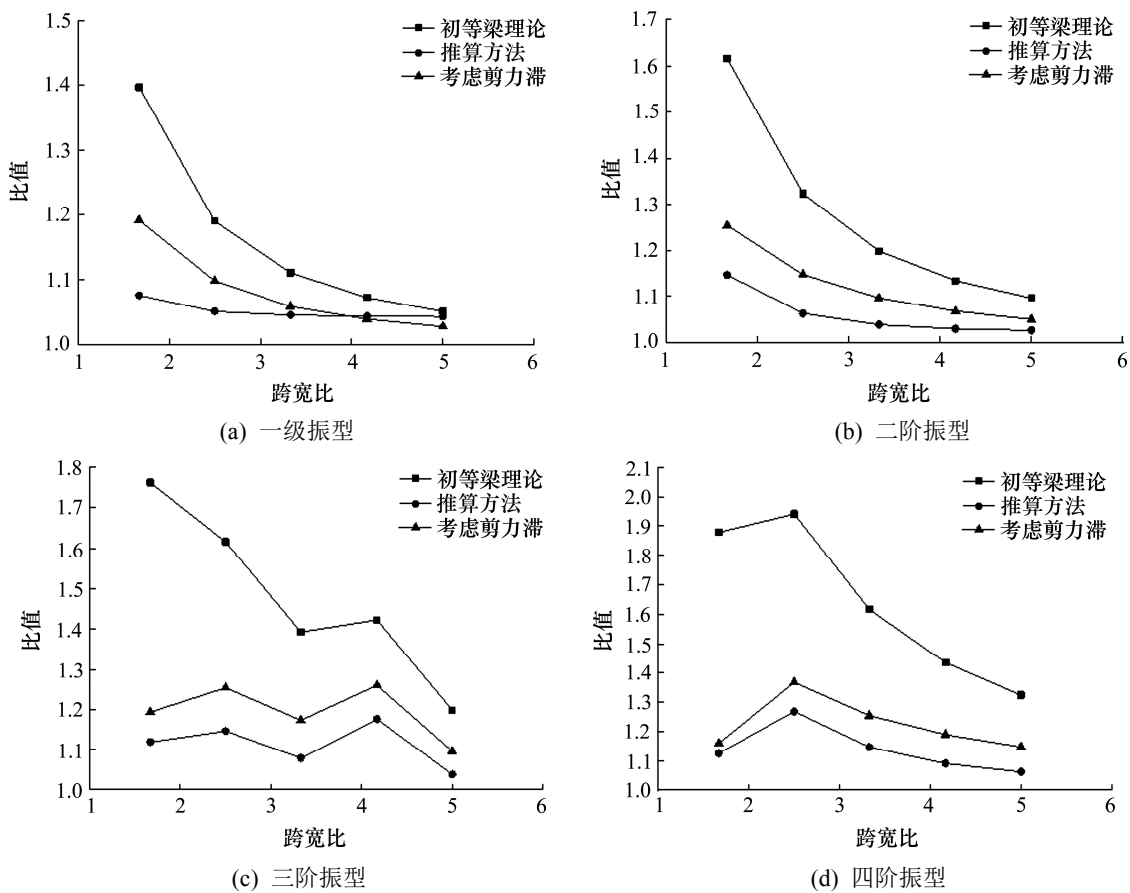


图 2 自振频率的比值

Fig. 2 Ratio of natural frequency

滞效应程度受到跨宽比的影响，当跨宽比越小，剪力滞效应越严重，减小了结构的相对刚度，因此，对简支箱梁的自振频率降低程度越大。

### 3 结论

通过对简支箱梁纵向静力平衡状态下的剪力滞效应分析，得出的结论为：

- 1) 推算的结果与 ANSYS 有限元的较为接近，精度能够满足工程需求，具有一定实用性。
- 2) 考虑剪力滞效应的自振频率，相比于初等梁理论偏小，是因为剪力滞效应减小了箱梁的相对刚度，使得简支箱梁的自振频率降低，且结构随着跨宽比的减小，剪力滞效应越明显。
- 3) 附加轴力会造成箱梁相对刚度的减小和自振频率的降低。

## 参考文献(References):

- [1] 吴有俊,罗旗帜,陈玉骥.考虑剪力滞效应简支箱梁自振方程的求解[J].佛山科学技术学院学报:自然科学版,2010,28(2):16-21.(WU You-jun,LUO Qi-zhi,CHEN Yu-ji. The solution of free vibration equation to simply-supported box girder considering shear lag effect[J]. Journal of Foshan University:Natural Science Edition, 2010,28(2):16-21.(in Chinese))
- [2] 张琪,罗旗帜,周旭辉.薄壁曲线箱梁自由振动的有限段法[J].中外公路,2018,38(6):71-75.(ZHANG Qi,LUO Qi-zhi, ZHOU Xu-hui. Finite segment method for analyzing free vibration of thin-walled curved box girder [J]. Journal of China & Foreign Highway, 2018, 38(6): 71-75.(in Chinese))
- [3] 蔺鹏臻,周世军,刘凤奎.抛物线型剪滞翘曲位移函数引起的附加轴力分析[J].工程力学,2010,27(8):90-93,119.(LIN Peng-zhen, ZHOU Shi-jun, LIU Feng-kui. Additional axial force analysis caused by parabolic warping displacement about shear lag[J]. Engineering Mechanics,2010,27(8):90-93,119.(in Chinese))
- [4] 罗文权,蔺鹏臻.薄壁箱梁剪力滞效应的有限梁段分析[J].铁道建筑,2019,59(10):11-14.(LUO Wen-quan,LIN Peng-zhen.Analysis of finite beam segment concerning shear lag effect of thin-walled box girder[J].Railway Engineering,2019,59(10):11-14.(in Chinese))
- [5] 柳兴成,蔺鹏臻.波形钢腹板箱梁余弦剪滞函数引起的附加轴力分析[J].公路工程,2018,43(5):1-4.(LIU Xing-cheng, LIN Peng-zhen.Analysis of additional axial force induced by cosine shear lag function of box girder with corrugated steel webs[J]. Highway Engineering, 2018,43(5):1-4.(in Chinese))
- [6] 潘旦光,丁民涛,陈钊.简支薄壁箱梁自由振动的摄动法解析解[J].哈尔滨工业大学学报,2016,48(12):56-61.(PAN Dan-guang, DING Min-tao, CHEN Fan. Analytic solution of free vibration of simply-supported thin-walled box girder by perturbation method[J].Journal of Harbin Institute of Technology,2016,48(12):56-61.(in Chinese))
- [7] 蔡恒,卢海林,汤正.考虑剪力滞效应的曲线箱梁自振特性研究[J].世界地震工程,2016,32(4):239-244.(CAI Heng,LU Hai-lin,TANG Zheng.Vibration properties research on curved box girder considering shear lag effects[J]. World Earthquake Engineering, 2016, 32(4): 239-244.(in Chinese))
- [8] 刘健新,马麟,胡庆安.薄壁箱梁振动时的剪力滞效应[J].郑州大学学报:工学版,2008,29(3):125-128.(LIU Jian-xin,MA Lin,HU Qing-an.The research of analysis method shear lag's effect on forced vibration of thin-walled box-girder[J].Journal of Zhengzhou University: Engineering Science,2008,29(3):125-128.(in Chinese))
- [9] 甘亚南,赫中营,戎涛,等.宽翼薄壁工字形曲梁剪滞效应的能量变分法[J].工程力学,2010,27(12):1-7,20.(GAN Ya-nan, HE Zhong-ying, RONG Tao, et al. Energy-variation method for the analysis of shear lag effect of thin-walled curved I-beam with wide flange[J]. Engineering Mechanics,2010,27(12):1-7,20.(in Chinese))
- [10] 甘亚南,王根会,吴亚平.剪力滞效应对连续箱梁自振特性影响的研究[J].兰州铁道学院学报:自然科学版,2003,22(1):40-43.(GAN Ya-nan, WANG Gen-hui, WU Ya-ping.Influence of shear lag on the characteristic of free vibration to continuous box girder[J]. Journal of Lanzhou Railway University: Natural Sciences, 2003, 22(1):40-43.(in Chinese))
- [11] 甘亚南,周广春,吴亚平.曲线薄壁箱梁侧向静力分析的能量变分法[J].固体力学学报,2011,32(4):411-418.(GAN Ya-nan, ZHOU Guang-chun, WU Ya-ping. Energy-variational method of lateral static analysis of thin-walled curved box girder[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics,2011,32(4):411-418.(in Chinese))
- [12] Gara F,Leoni G,Dezi L.A beam finite element including shear lag effect for the time-dependent analysis of steel-concrete composite decks[J]. Steel Construction, 2009,31(8):1888-1902.
- [13] Gara F,Ranzi G,Leoni G.Partial interaction analysis with shear-lag effects of composite bridges: A finite element implementation for design applications[J].Advanced Steel Construction,2011,7(1):1-16.
- [14] Luo Q Z, Chen Y J.Geometric nonlinear analysis of curved box continuous girders considering shear lag effect[J].Advanced Materials Research,2011,243-249:1811-1816.
- [15] 曹操,李传习,刘永明.小半径曲线连续梁桥地震反应分析[J].交通科学与工程,2018,34(2):64-70.(CAO Cao,LI Chuan-xi,LIU Yong-ming. Seismic response analysis of minor radius curve continuous beam bridge[J].Journal of Transport Science and Engineering,2018,34(2):64-70.(in Chinese))
- [16] 郭金琼,房贞政,郑振.箱型梁设计理论[M].北京:人民交通出版社,2008.(GUO Jin-qiong, FANG Zhen-zheng, ZHENG Zhen. Design theory of box girder[M]. Beijing: China Communications Press, 2008.(in Chinese))
- [17] 刘延柱,陈文良,陈立群.振动力学[M].北京:高等教育出版社,2011.(LIU Yan-zhu, CHEN Wen-liang, CHEN Li-qun. Vibration mechanics[M]. Beijing: Higher Education Press,2011.(in Chinese))