

DOI:10.16544/j.cnki.cn43-1494/u.2022033123101971

文章编号:1674-599X(2023)05-0102-09

引用格式:王动,邓继华.对称几何非线性三角形平面单元研究[J].交通科学与工程,2023,39(5):102-110.

Citation: YANG Yiming, ZHOU Chengkun, CHEN Huan WANG Dong, DENG Jihua. Study on geometrically nonlinear triangle plane element with symmetry[J]. J. Transp. Sci. Eng., 2023, 39(5): 102-110.

对称几何非线性三角形平面单元研究

王动¹, 邓继华²

(1. 淮北市交通投资控股集团有限公司, 安徽 淮北 235000;

2. 长沙理工大学 土木工程学院, 湖南 长沙 410114)

摘要:为克服现有共旋法的几何非线性平面单元切线刚度矩阵的不对称给非线性方程组求解带来的困难,基于共旋坐标法与几何一致性相结合的原则,对三角形平面单元进行了研究。将单元共旋坐标系的原点坐标分量始终设为三角形的3个顶点坐标分量的平均值,合理选择共旋坐标系初始时刻及任意计算时刻的坐标轴方向,基于虚功原理,利用微分方程,建立三角形平面单元在大转动、小应变条件下的几何非线性单元切线刚度矩阵和相应的节点抗力算法。研究表明:该切线刚度矩阵是对称的;且将该切线刚度矩阵与一种能将位移增量法与荷载增量法形成统一迭代格式的非线性方程组求解方法进行结合,能大幅简化求解过程,依据推导公式与算法开发了相应的计算程序,并利用该计算程序对柔性立柱和大变形悬臂梁的经典算例进行了计算和比较,验证了该研究理论推导结果的正确性与计算程序的可靠性,且算例2显示该算法的计算精度高于ANSYS商业数值软件的。

关键词:共旋法;三角形平面单元;几何非线性;对称切线刚度矩阵;虚功原理

中图分类号:TU378.2

文献标志码:A

Study on geometrically nonlinear triangle plane element with symmetry

WANG Dong¹, DENG Jihua²

(1. Huabei Transportation Investment Holding Group Co., Ltd., Huabei 235000, China;

2. School of Civil Engineering, Changsha University of Science & Technology, Changsha 410114, China)

Abstract: In order to overcome the difficulty of solving nonlinear equations caused by the asymmetry of the past element in present co-rotational approach, the triangular plane elements are studied based on the principle of the combination of co-rotational method and geometric consistency. The origin of the element co-rotation coordinate system is located at the average value point of the three node coordinate values, and coordinate axis directions at the initial time and random calculation time of co-rotational coordinate system are reasonably selected. Based on the principle of virtual work and differentiation, the tangent stiffness matrix of geometric nonlinear element and the corresponding node resistance algorithm of triangular plane element under the condition of large rotation and small strain are established. It shows that the tangent stiffness matrix is symmetric from the calculation formula, and a corresponding program is developed combined with a unified incremental iteration scheme of incremental displacement method and incremental loading method for solving nonlinear equations. The

收稿日期:2022-03-31

基金项目:国家自然科学基金项目(52278142);湖南省自然科学基金项目(2023JJ30019);湖南省教育厅项目(21A0187);桥梁结构健康与安全国家重点实验室开放基金项目(BHSL21-06-GF)

作者简介:王动(1971—),男,淮北市交通投资控股集团有限公司,高级工程师。E-mail: 15756143936@163.com

classical examples of flexible column and large deformation cantilever beam are analyzed to verify the correctness of theoretical deduction and the program reliability.

Key words: co-rotational procedure; triangle element; geometric nonlinearity; symmetric tangent stiffness matrix; virtual work principle

随着高强度、轻质材料的广泛应用,工程结构不断向大跨、柔性的方向发展,结构的非线性效应也愈加明显,对结构进行整体或局部的动力、静力分析时必须考虑非线性效应的影响,才能满足安全、经济的设计要求。在这一过程中,建立各种精确、高效的单元模型,并考虑其所面对的非线性效应是关键^[1-2]。目前,采用诸如 ANSYS 等大型商业数值软件对结构进行非线性分析是主流的研究方法。但事实上,完全拉格朗日法(total lagrange, TL)、修正的拉格朗日法(updated lagrange, UL)以及共旋坐标法(corotational, CR法)才是各种非线性单元分析的主要算法。相对于TL法和UL法而言,CR法出现的时间较晚,且相关研究较少。因此,TL与UL这两种算法被 ANSYS 等商业数值软件广泛采用,而到目前为止,CR法尚未被商业数值软件采用。

FELIPPA 等^[3]认为 CR 法仅适用于大转动、小应变的运动条件,苛刻的应用条件使其不能满足大型商业工程仿真数值软件的算法适用范围必须很宽的要求,这也是其被众多商业工程仿真数值软件弃用的主要原因。但 RANKIN 等^[4-6]认为在物体发生大转动、小应变的运动条件下,CR 法相对于 TL 法和 UL 法具有两个非常明显的优势:一是在进行非线性单元研究时,CR 法能非常方便地引入各种先进线性单元,而无须考虑推导这些先进线性单元时所采用的各种假设条件;二是在非线性列式中,几何非线性与材料非线性是解耦的,即材料非线性在共旋坐标系下进行计算,而几何非线性则通过变量在共旋坐标系与结构坐标系之间的转换矩阵被自动计入。由于工程结构中的非线性问题绝大部分都属于大转动、小应变的范围^[7],因此,基于 CR 法研究各种非线性单元,对促进结构非线性效应研究具有十分重要的意义。杨浩文等^[8]采用共旋坐标法建立了考虑几何非线性的 Timoshenko 梁单元,并基于该单元建立了用于非线性动力分析的能量守恒逐步积分算法。冯晓东等^[9]

基于共旋坐标法,推导了大位移空间杆单元的切线刚度矩阵,并将其结论运用在一个对四杆张拉整体结构单元体的几何非线性弹塑性特性进行分析的研究上,该研究结果表明,相比于传统的 TL 法和 UL 法,CL 法具有更高的计算效率。邓继华等^[10]将共旋坐标法和稳定函数结合起来,利用共旋坐标法考虑大位移,利用稳定函数考虑 P- δ 效应,多个经典算例分析均表明该非线性平面梁单元具有较高的计算精度和效率。张亮等^[11]则采用共旋坐标法,推导了一个适用于充气薄膜结构褶皱分析的空间三节点的三角形膜单元。目前,也有一些学者基于共旋法对平面单元方面进行了研究。蔡松柏等^[12]基于共旋法与场一致性原则,分别建立了四节点四边形和八节点四边形几何非线性平面单元。邓继华等^[13-14]还将仅限于几何非线性的研究扩展到几何与材料双非线性领域。相对于四边形平面单元而言,基于共旋法分析几何非线性三角形平面单元的研究很少,笔者仅查阅到文献[15],该文献基于共旋法与场一致性原则,对几何非线性三角形平面单元进行了研究。不过需要指出的是,邓继华等^[15]与蔡松柏等^[12-14]学者一样,其推导出的单元切线刚度矩阵均是非对称的矩阵,这将给非线性方程组的求解带来一定的困难。众所周知,平面三角形单元作为常应变单元,当网格化较为稀疏时,其计算精度较低;但随着单元网格数量的增加,其计算精度会迅速提高。且三角形平面单元可适用于复杂和不规则边界形状的分析^[16]。因此,基于 CR 法,建立具有对称切线刚度矩阵的几何非线性三角形平面单元是十分必要的。

综上所述,本研究在这些研究的基础上,针对三角形平面单元,借鉴 YAW 等^[17]的研究方法,采用具有对称切线刚度矩阵的几何非线性梁单元,合理选择三角形平面单元共旋坐标系的原点及坐标轴方向,基于与虚功原理相结合的几何一致性原则^[18],建立三角形平面单元在大转动、小应变条件

下,具有对称特征的几何非线性单元切线刚度矩阵和相应的节点抗力算法;对于该算法中待求解的非线性方程组,采用一种能将位移增量法与荷载增量法形成统一迭代格式的新方法^[19],开发了相应的计算程序,并将该计算程序应用于大变形悬臂梁计算的两个经典算例,将该算法对这两个算例的计算结果与ANSYS商业数值软件的计算结果进行了对比,验证了本研究建立的有限元列式和算法的正确性,且算例2的计算比较结果也表明该算法的计算精度略高于ANSYS商业数值软件的计算精度。

1 共旋法有限元列式

1.1 基本图式

变形前、后的三角形平面单元如图1所示。

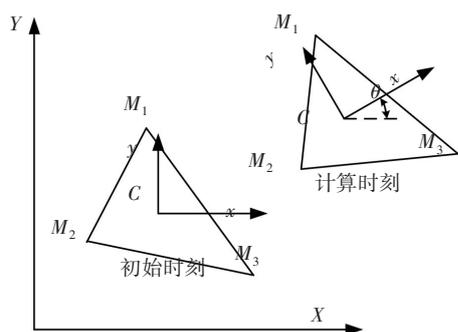


图1 变形前后平面单元

Fig. 1 Plane element before and after deformation

在图1中, XOY 为固定不变的结构坐标系, xoy 为随单元平移和转动的共旋坐标系,取三角形3个顶点 M_1, M_2, M_3 坐标分量的平均值作为点 C 在结构坐标系 XY 下的坐标分量值。在初始时刻, x 轴方向平行于 X 轴;在任意计算时刻, x 轴的方向由刚性转角 θ 确定, y 轴的方向则由 x 轴逆时针旋转 90° 得到。

1.2 平面单元的切线刚度和抗力矩阵

对图1所示三角形平面单元,设

$$\mathbf{R}_i^0 = (X_i^0, Y_i^0), i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

$$\mathbf{R}_i = (X_i, Y_i), i = 1, 2, 3 \quad (2)$$

$$\mathbf{u}_i = (U_i, V_i), i = 1, 2, 3 \quad (3)$$

$$\mathbf{r}_c^0 = (X_c^0, Y_c^0) \quad (4)$$

$$\mathbf{r}_c = (X_c, Y_c) \quad (5)$$

式中:

\mathbf{R}_i^0 为初始时刻的节点单元;

\mathbf{R}_i 为计算时刻单元在结构坐标系下的节点坐标;

\mathbf{u}_i 为单元在结构坐标系下的节点位移;

\mathbf{r}_c^0 为初始时刻共旋坐标系 xy 的原点 C 在结构坐标系下的坐标;

\mathbf{r}_c 计算时刻共旋坐标系 xy 的原点 C 在结构坐标系下的坐标。故有

$$\begin{cases} X_c^0 = \frac{1}{3}(X_1^0 + X_2^0 + X_3^0) \\ Y_c^0 = \frac{1}{3}(Y_1^0 + Y_2^0 + Y_3^0) \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} X_c = X_c^0 + U_c \\ Y_c = Y_c^0 + V_c \end{cases} \quad (7)$$

在式(2)中, $\mathbf{u}_c = (U_c, V_c)$,是在计算时刻,共旋坐标系原点 C 在结构坐标系下的位移,故有

$$\begin{cases} U_c = \frac{1}{3}(U_1 + U_2 + U_3) \\ V_c = \frac{1}{3}(V_1 + V_2 + V_3) \end{cases} \quad (8)$$

同时, $\mathbf{R}_i = (X_i, Y_i)$ 与 $\mathbf{R}_i^0 = (X_i^0, Y_i^0)$ 之间有关系:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_i^0 \\ Y_i^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \end{bmatrix}, i = 1, 2, 3 \quad (9)$$

设 $\mathbf{r}_i^0 = (x_i, y_i), i = 1, 2, 3$ 为初始时刻单元节点在共旋坐标系下的坐标,显然有关系:

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_i^0 - X_c^0 \\ Y_i^0 - Y_c^0 \end{bmatrix}, i = 1, 2, 3 \quad (10)$$

假定计算时刻单元发生节点位移 \mathbf{u}_i 后,共旋坐标系 x 轴与结构坐标系 X 轴的夹角 θ 已求出,则计算时刻单元在共旋坐标系下的节点位移 $\bar{\mathbf{u}}_i = (\bar{U}_i, \bar{V}_i), i = 1, 2, 3$ 的计算式为

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_i \\ \bar{V}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i - X_c \\ Y_i - Y_c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \quad (11)$$

对于计算时刻 x 轴与 X 轴夹角 θ 的确定,可参照文献[20]中的方法。夹角 θ 的选取的原则是:选取能使得 $\sum_{i=1}^3 \bar{U}_i^2 + \bar{V}_i^2$ 值最小的 θ ,故可将其带入式(11),这时式(11)变为 θ 的函数,对其进行关于 θ 的求导,并令该导数为0。可得

$$\tan \theta =$$

$$\frac{\sum_{i=1}^3 [x_i(Y_i + V_i - Y_c - V_c) - y_i(X_i + U_i - X_c - U_c)]}{\sum_{i=1}^3 [x_i(X_i + U_i - X_c - U_c) + y_i(Y_i + V_i - Y_c - V_c)]} \quad (12)$$

显然,由式(12)可得到两个解,分别为 θ 和 $\theta + \pi$,将这两个解代入式(11),选取使 $\sum_{i=1}^3 \bar{U}_i^2 + \bar{V}_i^2$ 较小的那个作为最终解。

为描述方便,令

$$P_1 = [\bar{U}_1 \quad \bar{V}_1 \quad \bar{U}_2 \quad \bar{V}_2 \quad \bar{U}_3 \quad \bar{V}_3]^T;$$

$$P_g = [U_1 \quad V_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad U_3 \quad V_3]^T。$$

设共旋坐标系与结构坐标系下与 P_1 和 P_g 分别对应的节点力为 f_1 和 f_g ,设三角形平面单元在共旋坐标系下的刚度矩阵为 k_1 ,根据前面所述共旋坐标法的性质,有

$$f_1 = k_1 P_1 \quad (13)$$

由共旋坐标系与结构坐标系下虚功相等的原则[18],有

$$\delta P_{gv}^T f_g = \delta P_{lv}^T f_1 \quad (14)$$

其中,位移微分的下标 v 表示该变量为虚拟量。

先对式(12)进行微分,得到 $\delta\theta$ 与 δP_g 之间的关系,再对式(11)进行微分,可得到 δP_1 与 δP_g 的关系,其表达式为

$$\delta P_1 = B \delta P_g \quad (15)$$

联立式(14)~(15),可得到 f_1 和 f_g 之间的关系,其表达式为

$$f_g = B^T f_1 \quad (16)$$

对式(16)进行微分,并联立公式(13),有

$$\delta f_g = \delta B^T f_1 + B^T k_1 B \delta P_g \quad (17)$$

设三角形平面单元在结构坐标系下的几何非线性切线刚度矩阵为 k_g ,即:

$$\delta f_g = k_g \delta P_g \quad (18)$$

联立式(17)、(18),则有

$$k_g = B^T K_1 B + k_h \quad (19)$$

且

$$k_h = \frac{\partial (B^T f_1)}{\partial P_g} \Big|_{f_1} \quad (20)$$

显然,要得到 k_h 的具体表达式,关键是求出 δB^T 。因此,对式(11)进行变分,可得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta \bar{U}_i \\ \delta \bar{V}_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta U_i - \delta U_c \\ \delta V_i - \delta V_c \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} y_{di} \\ -x_{di} \end{bmatrix} \delta \theta \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (21)$$

式中: $x_{di} = \bar{U}_i + x_i$;

$$y_{di} = \bar{V}_i + y_i。$$

为求出式(21)中的 $\delta\theta$,对式(12)进行微分,则有关系:

$$\begin{aligned} \delta\theta &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\sum_{i=1}^3 [x_i x_{di} + y_i y_{di}]} \begin{bmatrix} -y_i & x_i \end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta U_i - \delta U_c \\ \delta V_i - \delta V_c \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

联立式(21)~(22)及式(15),可得到 B 的表达式:

$$B = P E^T \quad (23)$$

式中: $P = I - A G$,且有

$$A = \begin{bmatrix} -y_{d1} & x_{d1} & -y_{d2} & x_{d2} & -y_{d3} & x_{d3} \end{bmatrix}^T;$$

$$G = \frac{1}{\sum_{i=1}^3 [x_i x_{di} + y_i y_{di}]} \begin{bmatrix} -y_1 & x_1 & -y_2 & x_2 & -y_3 & x_3 \end{bmatrix};$$

$$E = \text{diag}(R \quad R \quad R)。$$

其中,

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

至此,联立式(20)、(23),并考虑 $A^T G^T = I$,可得到 k_h 的具体表达式:

$$k_h = E [-F^T G - G^T F P] E^T \quad (24)$$

其中,有

$$P^T f_1 = [n_1 \quad n_2 \quad n_3 \quad n_4 \quad n_5 \quad n_6]^T$$

$$F = [n_2 \quad -n_1 \quad n_4 \quad -n_3 \quad n_6 \quad -n_5]^T$$

将式(24)代入式(19),可得到三角形平面单元在结构坐标系下的几何非线性切线刚度矩阵为 k_g ,其表达式为

$$k_g = E (-F^T G - G^T F P) E^T + B^T k_1 B \quad (25)$$

考虑到式(25)中等号右边各项矩阵具有的特殊形式,不难证明 k_g 是对称的。

2 非线性计算流程及方程组求解

先输入结构的初始几何、材料、荷载及边界约束等参数,再结合单元网格划分得到每个单元初始

时刻在共旋坐标系下的节点坐标、原点坐标、单元刚度矩阵及总荷载矩阵,保留这些数据。在每一级荷载增量步中,迭代的具体步骤是:

步骤1:由上一级荷载增量步末的总节点位移确定当前单元的节点位移 $u_i = (U_i, V_i), i = 1, 2, 3$;

步骤2:由式(8)得到当前单元共旋坐标系原点 C 在结构坐标系下的位移 (U_c, V_c) ;

步骤3:由式(12)并结合所得 θ 值需使 $\sum_{i=1}^3 \bar{U}_i^2 + \bar{V}_i^2$ 较小的原则确定单元的刚体转角值 θ ;

步骤4:由式(11)得到当前单元在共旋坐标系下的节点位移 $\bar{u}_i = (\bar{U}_i, \bar{V}_i), i = 1, 2, 3$;

步骤5:由式(13)得到当前单元在共旋坐标系下的节点力 f_i ;

步骤6:对式(11)微分,基于 δP_1 与 δP_g 的关系,得到矩阵 B ,进而由式(16)得到当前单元在结构坐标系下的节点力 f_g ;

步骤7:联立式(23)~(24)与(25)得到当前单元在结构坐标系下的切线刚度矩阵 k_g ;

步骤8:对所有单元进行步骤1~7的操作,将每个单元在结构坐标系下的切线刚度矩阵 k_g 进行叠加,得到结构总刚矩阵与总抗力矩阵;

步骤9:结构非线性平衡方程组右端的不平衡力矩阵则由总荷载矩阵减去总抗力矩阵形成;

步骤10:引入边界条件后,进行非线性平衡方程组的求解,得到当前迭代步的增量节点位移,将其与之前的总节点位移叠加,形成新的总节点位移;

步骤11:进行收敛判断,如收敛,转至下一个荷载增量步;如不收敛,进入下一个迭代步。

最常用的非线性方程组求解方法是荷载增量法和位移增量法,这两种方法均存在一些各自的优缺点。为综合利用这两种方法的优点而又能避免各自的缺点,本研究采用已有的非线性方程组求解方法^[19],该方法将荷载因子 λ 视为第 $n+1$ 个变量,从而将非线性方程组的荷载-位移求解空间由 R^n 扩展到 R^{n+1} ,推导出一种能集荷载增量法和位移增量法于一体的统一迭代格式,该方法在实际研究中得到了较广泛的应用^[12,21]。

3 算例分析

3.1 算例1

底端固结上端自由的柔性立柱,该柔性立柱高

为9 m,宽为3 m,厚为1 m,具体如图2所示。在该柔性立柱中,自由端截面中心承受的水平力 P 的数值为 2.7778×10^9 kN,所使用材料的弹性模量 E 为 1.0×10^{10} kN/m²,泊松比 μ 为0。文献[15]基于其推导的具有非对称切线刚度矩阵的三角形平面单元对该算例进行了计算,并用ANSYS商业数值软件进行了验证。为验证本研究推导公式和算法的合理性与有效性,将本研究的计算结果及与文献[15]的计算结果进行对比(这两种计算都是基于将柔性立柱在 X 轴向与 Y 轴方向,并按0.25 m的间距对其进行单元网格划分的,单元网格划分均产生了481个节点和864个单元),结果见表1。

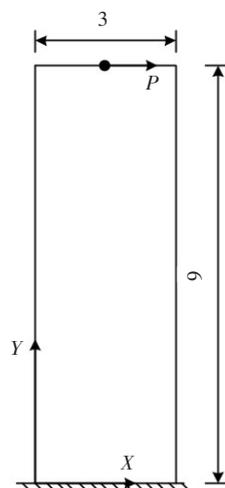


图2 承受水平集中荷载的柔性立柱(单位:m)

Fig. 2 Flexible column under horizontal concentrated load (unit: m)

由表1可知,本研究得到的解与文献[15]的解吻合良好。这是因为在求解结构坐标系下的单元节点抗力时,本研究与文献[15]都是基于先在共旋坐标系,再进行转换得到的。具体都是先用单元线性刚度矩阵乘以去除刚体后的纯变形,得到共旋坐标系下的单元节点抗力,再将其转换到结构坐标系下进行计算,计算得到的矩阵与对应阶段的荷载矩阵之差即为不平衡力矩阵。CRISFIELD^[18]也指出,结构非线性有限元计算的精度主要由不平衡力的计算决定,单元切线刚度矩阵的计算仅决定非线性有限元计算的效率。因此,在按5个等荷载步进行加载时,在同样的收敛精度要求下,若每一步迭代采用本研究的迭代步骤,则仅需3个迭代步;而若采用文献[15]的迭代步骤,则需要不少于5个迭代步。

这也表明了本研究方法在保证计算精度的前提下,能较好地提高算法的计算效率。

表1 柔性立柱自由端的水平位移

Table 1 Horizontal displacement at free end m

算法类型	节点坐标		
	(0.0,9.0)	(1.5,9.0)	(3.0,9.0)
线性解	30.434	30.709	30.435
文献[15]	10.468	9.275	7.111
本研究	10.467	9.273	7.110

3.2 算例2

在本算例中,假设当自由端承受水平荷载 P (大小为287 500 kN)时,集中荷载作用的悬臂梁的梁长 L 为10 m、弹性模量 E 为 3.45×10^7 kN/m²,具体如图3所示。梁的高度与厚度均为1 m,泊松比 μ 取为0,并令 $\alpha = PL^2/EI$, P 是外荷载, L 是梁的长度, E 为弹性模量, I 为截面抗弯惯性矩。沿悬臂梁的高度方向,将其分别均匀划分成10、20层,沿其长度方向均分成50段。

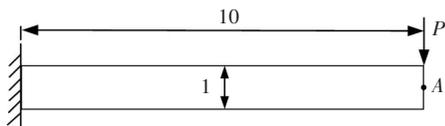


图3 端部承受集中荷载的悬臂梁(单位:m)

Fig. 3 Cantilever beam subjected to concentrated load at free end(unit: m)

在这两种划分方式下,分别形成了561个节点、1 000个单元及1 071个节点、2 000个单元的两种有限元网格。本算例将荷载 P 分成10级增量,采取逐渐施加的方式,并采用荷载增量法对其结构非线性方程组进行求解。对于梁端截面1/2高度处节点A的垂直位移 w ,本研究计算值和线型方程的解析解^[22]进行了对比,结果如图4所示。在图4中,计算值1是将悬臂梁划分为1 000个单元的网格计算得到的,计算值2则是将悬臂梁划分为2 000个单元的网格计算得到的。

从图4中可以看出,第一种网格划分(1 000个单元)下的计算精度较差,其中,当 α 为1时,解析解和数值解分别为3.017 2 m和5.375 8 m,相对误差为78.2%。当 α 为10时,解析解和数值解分别为8.106 1 m和8.328 4 m,相对误差为2.74%;但将该悬梁臂进行更细致地划分,分隔成第二种网格(2 000个单元)后,计算精度得到了提高。其中,当 α 为1时,解析解和数值解分别为3.017 2 m和3.322 2 m,相对误差为10.10%,当 α 为10时,解析解和数值解分别为8.106 1 m和8.137 3 m,相对误差为0.38%。当 α 分别为0(初始状态)、1.5及10时,悬臂梁的变形如图5所示。

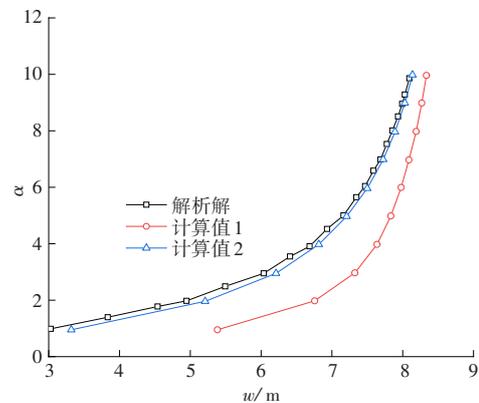


图4 荷载-竖向位移曲线

Fig. 4 Load - vertical displacement diagram

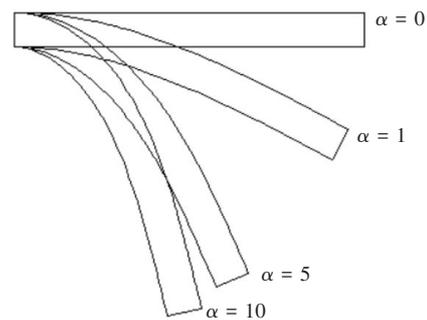


图5 悬臂梁的变形

Fig. 5 Deformation configuration of cantilever beam

为了比较本研究的推导算法与ANSYS商业数值软件算法的优劣,本研究也采用ANSYS商业数值软件对该算例进行了仿真与计算。其单元网格划分与本研究的第二种网格划分(2 000个单元)完全相同,也取10个荷载步进行计算。为便于与本研究所导出的单元进行比较,采用由Plane 42单元退化的三角形单元。当 α 为10时,由ANSYS商业数值软

件计算得到的悬臂梁变形及初始状态如图6所示。



图6 悬臂梁的变形

Fig. 6 Deformation configuration of cantilever beam

从图6可以看出,当 α 为10时,ANSYS商业数值软件计算的节点A的垂直位移 w 为8.180 8 m,该值与线性方程组解析解的相对误差为0.92%,而本研究算法仅与解析解的相对误差仅为0.39%。因此,本研究算法的精度略高于ANSYS商业数值软件的计算精度。

4 结论

1) 通过合理确定共旋坐标系原点及坐标轴方向,结合虚功原理与几何一致性原则,建立基于共旋法的具有对称切线刚度矩阵的几何非线性三角形平面单元,从而避免切线刚度矩阵不对称给非线性方程组求解带来的麻烦。

2) 基于本研究推导公式及算法程序得到的数值解与已有文献数值解及经典解析解均吻合良好。且在同等条件下,本研究对经典算例的计算精度略高于ANSYS商业数值软件的计算精度。为提高结构非线性分析的精度和效率,可将本研究方法推广至高阶单元,如六节点的三角形单元。

3) 利用共旋法特有的几何非线性与材料非线性解耦的特点和优点,可将本研究方法拓展到钢筋混凝土结构的几何与材料的双非线性分析研究中,这也是下一阶段工作将重点研究的内容。

参考文献(References):

[1] 陈羽中,张家滨,颜东煌.基于静载试验的PPC斜拉桥有限元模型修正分析[J].交通科学与工程,2021,37

(4): 59-66, 100. DOI: 10.16544/j.cnki.cn43-1494/u.2021.04.007.

CHEN Yuzhong, ZHANG Jiabin, YAN Donghuang. Finite element model updating of PPC cable stayed bridge based on the static load experiment[J]. Journal of Transport Science and Engineering, 2021, 37(4): 59-66, 100. DOI: 10.16544/j.cnki.cn43-1494/u.2021.04.007.

[2] 陈伏彬,范翔,张轩浪,等.角钢塔典型节点受力性能有限元分析[J].长沙理工大学学报(自然科学版),2022,19(1): 45-52. DOI: 10.19951/j.cnki.1672-9331.2022.01.006.

CHEN Fubin, FAN Xiang, ZHANG Xuanlang, et al. Mechanical performance of typical joints of angle steel tower based on finite element analysis [J]. Journal of Changsha University of Science & Technology (Natural Science), 2022, 19(1): 45-52. DOI: 10.19951/j.cnki.1672-9331.2022.01.006.

[3] FELIPPA C A, HAUGEN B. A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. Theory [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194 (21/22/23/24): 2285-2335. DOI: 10.1016/j.cma.2004.07.035.

[4] RANKIN C C, BROGAN F A. An element independent corotational procedure for the treatment of large rotations [J]. Journal of Pressure Vessel Technology, 1986, 108 (2): 165-174. DOI: 10.1115/1.3264765.

[5] RANKIN C C, NOUR-OMID B. The use of projectors to improve finite element performance [J]. Computers & Structures, 1988, 30 (1/2): 257-267. DOI: 10.1016/0045-7949(88)90231-3.

[6] 王振,孙秦.基于共旋三角形厚薄通用壳元的几何非线性分析[J].工程力学,2014,31(5): 27-33. DOI: 10.6052/j.issn.1000-4750.2012.12.0958.

WANG Zhen, SUN Qin. Geometrically nonlinear analysis using a corotational triangular thick and thin shell element [J]. Engineering Mechanics, 2014, 31(5): 27-33. DOI: 10.6052/j.issn.1000-4750.2012.12.0958.

[7] 何君毅,林祥都.工程结构非线性问题的数值解法[M].北京:国防工业出版社,1994.

HE Junyi, LIN Xiangdu. Numerical solution of nonlinear problems of engineering structures [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1994.

- [8] 杨浩文, 吴斌, 潘天林, 等. Timoshenko梁能量守恒逐步积分算法[J]. 工程力学, 2019, 36(6): 21-28. DOI: 10.6052/j.issn.1000-4750.2018.01.0033.
YANG Haowen, WU Bin, PAN Tianlin, et al. Energy-conserving time integration method for Timoshenko beams [J]. Engineering Mechanics, 2019, 36(6): 21-28. DOI: 10.6052/j.issn.1000-4750.2018.01.0033.
- [9] 冯晓东, 罗尧治, 丁毅, 等. 基于共旋坐标法的张拉整体结构弹塑性静力分析[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2019, 47(11): 122-129. DOI: 10.12141/j.issn.1000-565X.180557.
FENG Xiaodong, LUO Yaozhi, DING Yi, et al. Static elasto-plastic analysis of tensegrity structures based on co-rotational formulation [J]. Journal of South China University of Technology (Natural Science Edition), 2019, 47(11): 122-129. DOI: 10.12141/j.issn.1000-565X.180557.
- [10] 邓继华, 谭建平, 谭平, 等. 基于共旋法与稳定函数的几何非线性平面梁单元[J]. 工程力学, 2020, 37(11): 28-35.
DENG Jihua, TAN Jianping, TAN Ping, et al. A geometric nonlinear plane beam element based on corotational formulation and on stability functions [J]. Engineering Mechanics, 2020, 37(11): 28-35.
- [11] 张亮, 曹进军, 董凯骏, 等. 充气薄膜褶皱分析的高效互补有限元列式[J]. 工程力学, 2020, 37(8): 1-9. DOI: 10.6052/j.issn.1000-4750.2019.09.0533.
ZHANG Liang, CAO Jinjun, DONG Kaijun, et al. An efficient complementarity finite element formulation for wrinkling analysis of pneumatic membranes [J]. Engineering Mechanics, 2020, 37(8): 1-9. DOI: 10.6052/j.issn.1000-4750.2019.09.0533.
- [12] 蔡松柏, 沈蒲生, 胡柏学, 等. 基于场一致性的2D四边形单元的共旋坐标法[J]. 工程力学, 2009, 26(12): 31-34.
CAI Songbai, SHEN Pusheng, HU Baixue, et al. A field consistency based co-rotational finite element procedure for 2d quadrilateral element [J]. Engineering Mechanics, 2009, 26(12): 31-34.
- [13] 邓继华, 邵旭东, 邓潇潇. 四边形八节点共旋法平面单元的几何非线性分析[J]. 工程力学, 2011, 28(7): 6-12.
DENG Jihua, SHAO Xudong, DENG Xiaoxiao. Geometrically nonlinear analysis using a quadrilateral 8-node co-rotational plane element [J]. Engineering Mechanics, 2011, 28(7): 6-12.
- [14] 邓继华, 蔡松柏, 钟勇, 等. 高精度非线性平面应力单元的研究与应用[J]. 重庆建筑大学学报, 2007, 29(3): 83-87.
DENG Jihua, CAI Songbai, ZHONG Yong, et al. Study and application of high precision nonlinear plane stress element [J]. Journal of Chongqing Jianzhu University, 2007, 29(3): 83-87.
- [15] 邓继华, 邵旭东, 蔡松柏, 等. 大转动三角形平面单元有限元分析的共旋坐标法[J]. 长沙理工大学学报(自然科学版), 2010, 7(4): 32-36. DOI: 10.3969/j.issn.1672-9331.2010.04.006.
DENG Jihua, SHAO Xudong, CAI Songbai, et al. Co-rotational procedure for finite element analysis of triangular plane element of large rotation [J]. Journal of Changsha University of Science & Technology (Natural Science), 2010, 7(4): 32-36. DOI: 10.3969/j.issn.1672-9331.2010.04.006.
- [16] 龙志飞, 岑松. 有限元法新论: 原理·程序·进展[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2001.
LONG Zhifei, CEN Song. A new theory of finite element method: principle, procedure and progress [M]. Beijing: China Water & Power Press, 2001.
- [17] YAW L L, SUKUMAR N, KUNNATH S K. Meshfree co-rotational formulation for two-dimensional continua [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, 79(8): 979-1003. DOI: 10.1002/nme.2606.
- [18] CRISFIELD M A. Nonlinear finite element analysis of solids and structures [M]. vol 2. Chichester: John Wiley & Sons, Inc, 1997.
- [19] 邵旭东, 蔡松柏, 沈蒲生, 等. NFEM中荷载增量法和位移增量法的统一迭代格式[C]//中国计算力学大会2003论文集 工程与科学中的计算力学(上). 北京: 中国力学学会, 2003:244-247.
SHAO Xudong, CAI Songbai, SHEN Pusheng, et al. A unified iteration scheme for load/displacement incremental method of nonlinear FEM [C]. // China National Computational Mechanics Conference at 2003' Computational Mechanics in Engineering and Science. Beijing: Chinese Society of Mechanics, 2003:244-247.

- [20] BATTINI J M. A non-linear corotational 4-node plane element [J]. Mechanics Research Communications, 2008, 35 (6) : 408-413. DOI: 10.1016/j. mechrescom. 2008. 03. 002.
- [21] 蔡松柏, 沈蒲生. 大转动平面梁有限元分析的共旋坐标法[J]. 工程力学, 2006, 23(增刊1): 69-72, 68. DOI: 10.3969/j.issn.1000-4750.2006.z1.014.
- CAI Songbai, SHEN Pusheng. Co-rotational procedure for finite element analysis of plane beam under large rotational displacement [J]. Engineering Mechanics, 2006, 23(sup 1): 69-72, 68. DOI: 10.3969/j.issn.1000-4750.2006.z1.014.
- [22] 陈至达. 杆、板、壳大变形理论[M]. 北京: 科学出版社, 1994.
- CHEN Zhida. Large deformation theory of rod, plate and shell[M]. Beijing: Science Press, 1994.
- (责任编辑:李脉;校对:罗容;英文编辑:郭一鹏)

(上接第101页)

- Formulation optimization of crumb rubber modified asphalt based on orthogonal test[J]. Journal of Transport Science and Engineering, 2021, 37(4): 14-19. DOI: 10.16544/j.cnki.cn43-1494/u.2021.04.014.
- [30] 樊超, 张广威, 高国华, 等. 基于红外光谱的干法SBS改性剂在沥青混合料中分散均匀性研究[J]. 公路与汽运, 2022(1): 54-56, 60. DOI: 10.3969/j. issn. 1671-2668.2022.01.015.
- FAN Chao, ZHANG Guangwei, GAO Guohua, et al. Study on dispersion uniformity of dry SBS modifier in asphalt mixture based on infrared spectrum [J]. Highways & Automotive Applications, 2022(1): 54-56, 60. DOI: 10.3969/j.issn.1671-2668.2022.01.015.
- (责任编辑:李脉;校对:欧兆虎;英文编辑:陈璐)